Module: RECHERCHE OPERATIONNELLE (S7)

KORAICH almahdi
Maitre de conférences (ENCGT)
a.koraich@uae.ac.ma

ENCGT

2024-2025

Plan du Chapitre 1

1. Introduction à la RO
2. Quelques concepts clés

ENCGT

3

Chap. 1 - Introduction à la RO

ENCGT

4

Ouvrages de référence

- V. Chvátal - Linear Programming, W.H.Freeman, New York, 1983.
- R. J. Vanderbei - Linear Programming, Foundations and Extensions, Springer-Verlag, 2008.
- C. Guéret, C. Prins et M. Sevaux - Programmation linéaire : 65 problèmes d'optimisation modélisés et résolus avec Visual Xpress, Eyrolles, 2000.
- C. Prins et M. Sevaux - Programmation linéaire avec Excel : 55 problèmes d'optimisation modélisés pas à pas et résolus avec Excel, Eyrolles, 2011.

ENCGT

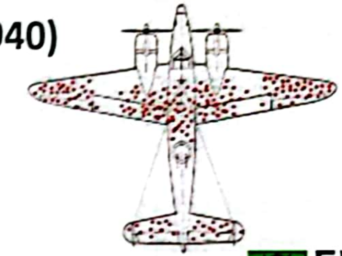
Recherche opérationnelle?

science de comment mieux faire avec moins

ENCGT

Chap. 1 – Introduction à la RO

- **<u>Origine de la RO :</u>**
  - **Seconde guerre mondiale**
    - ***développée lors de l'élaboration des radars (ce qui permet de résoudre les problèmes des opérations militaires, Étant donné que dans une situation comme la guerre, les ressources, par exemple le matériel et le personnel, sont limitées, l'utilisation efficace de ces ressources devient cruciale.)***
  - **Patrick Blackett (1940)**
  - **Dantzig (1947)**



ENCGT

Chap. 1 – Introduction à la RO

Domaine d'application...

ENCGT

Exemples:

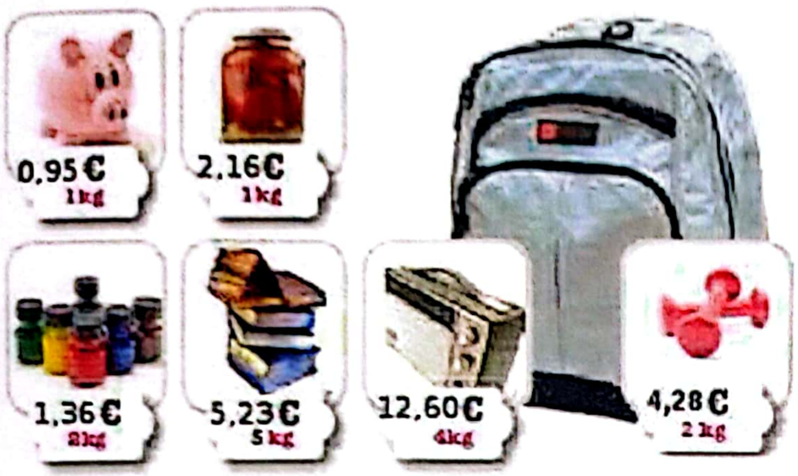
Exemple 1: Le problème du voyageur de commerce (TSP)

Déterminer les **routes** que les livreurs doivent emprunter pour **minimiser le déplacement total.)**

ENCGT

Exemples:

Exemple 2: Le problème du sac à dos

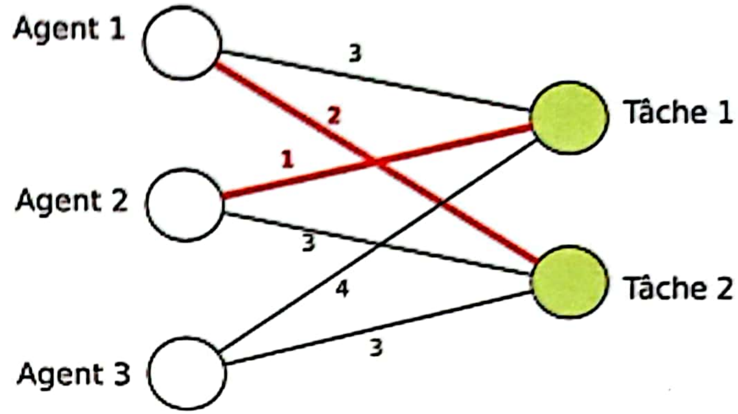


La maximisation de la valeur totale, sous contrainte (limite de capacité ou bien de poids).

ENCGT

Exemples:

Exemple 3 : Le problème d'affectation



La gestion des Ressources Humaines : la RO fournit des outils d'aides à l'affectation du personnel (graphe biparti) et de répartition des tâches entre agents et équipes.

Exemples:

Autres champs d'application

- **L'allocation des ressources**
- **Le pilotage de la qualité**
  - pour assurer la qualité tout au long de la chaîne de production
- **Gestion des approvisionnements**
  - Pour prévoir et assurer la gestion des besoins d'approvisionnement en matières premières de l'entreprise
- **L'ordonnancement**
  - gestion des tâches d'un projet dans le temps.

ENCGT

Exemples:

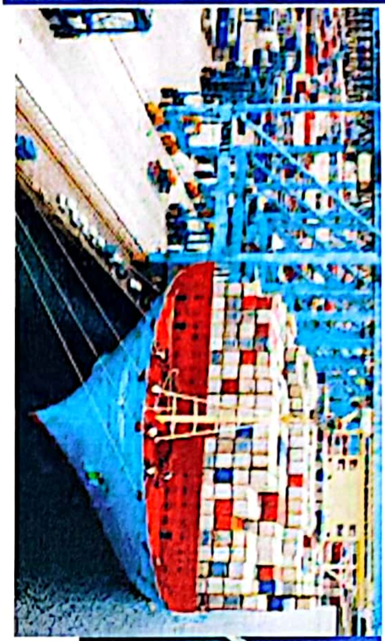
Autres champs d'application

- **Horaires**
  - assigner des employés a des plages d'horaire en tenant en compte les différentes contraintes.
- **Gestion de portefeuille et investissement**
  - déterminer l'argent a investir dans les différents fonds selon les rendements et les profits espères.
- **Gestion des stocks**
  - Pour lutter contre le gaspillage des MP ou de l'énergie et la pénurie. La RO contribue au conditionnement et à la livraison optimisés des produits en stock.

Exemples: Embouteillage

ENCGT

Exemples: Port Tanger Med



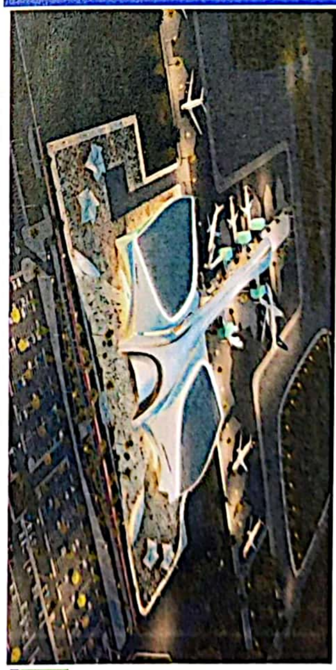
ENCGT

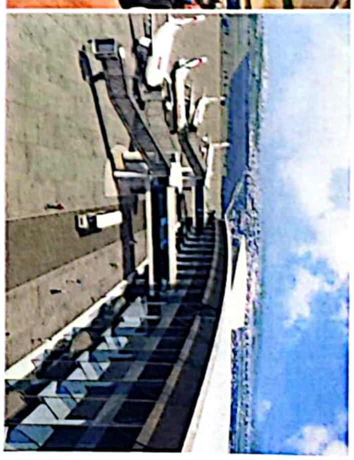
Chap. 1 – Introduction à la RO

1.2 Quelques concepts clés

ENCGT

Exemples: Nv Aéroport de Tanger





ENCGT

1.2 Quelques concepts clés

Modélisation:

Traduction de problèmes réels en équations mathématiques.

Optimisation:

Identification de la meilleur configuration possible d'un système.

Simulation:

Reproduction de fonctionnement d'un système complexe par un ordinateur.

ENCGT

1.2 Quelques concepts clés

Qu'est ce qu'un problème d'optimisation?

Généralement les problèmes d'optimisation se présente de la manière suivante:

- **Un énoncé :** le problème doit être clairement exprime, de manière non ambiguë.
- **Un ensemble de critère :** déduits de l'énoncé, permettant de comparer les solutions deux a deux.
- **Un objectif :** ,généralement exprimé mathématiquement, sous la forme d'une fonction (a minimiser ou a maximiser)
- **Un ensemble de solution.**

ENCGT

1.2 Quelques concepts clés

Programmation mathématique (PM):

C'est un problème d'optimisation qui consiste a trouver **l'optimum** d'une fonction $f(x)$ de **n variables** $x=(x1,.....,xn)$ soumise ou non a un ensemble de **m contraintes** $gi(x)=0$ ou $gi(x) \geq 0$

Programmation Linéaire (PL):

Ce sont des problèmes de la PM ou la **fonction objectif et les contraintes** sont toutes **linéaire**.

ENCGT

1.2 Quelques concepts clés

Domaine réalisable

Ensemble de tous les jeux de valeurs des variables de décision satisfaisant toutes les contraintes et restrictions de singe du PL (ensemble des solutions réalisables ou solutions admissibles).

Solution réalisable:

On appelle **solution réalisable** toute solution vérifie les contraintes du PL (y compris les contraintes de positivité)

ENCGT

Plan du Chapitre 2

ENCGT

2.1 Présentation Théorique d'un PL

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \text{ pour } i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, \qquad \text{pour } j = 1, \dots, n \end{cases}$$

On peut représenter le PL comme suit :
Un **programme linéaire** consiste à **trouver le maximum ou le minimum d'une forme linéaire** dite **fonction objectif** en satisfaisant **certaines équations et inégalités dites contraintes.**

ENCGT

2.1 Présentation Théorique d'un PL

Linéarité : objectif et contraintes sont des fonction linéaire des variables de décision (les coefficients C_j et a_{ij} des variables sont constants)
Continuité: les variables peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle respectant les contraintes linéaires

ENCGT

2.2 Les étapes d'une formulation d'un PL

1.Identifier les variables du problème à valeur non connues (**variable de décision)** et les représenter sous forme symbolique (exp. x_1, x_2).

2.Identifier la fonction objectif ou le critère de sélection et le représenter sous une **forme linéaire** en fonction des variables de décision. Spécifier si le critère de sélection est à maximiser ou à minimiser (**fonction économique**).

3.Identifier les contraintes du problème et les exprimer par un système d'équations linéaires.

ENCGT

Exemple de programmation linéaire :

Exemple de PL :

$$\max z = 5x_1 + 4x_2 \leftarrow \text{fonction objectif}$$

$$\text{s.c} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 20 \leftarrow \text{contrainte 1} \\ 2x_1 + x_2 \leq 35 \leftarrow \text{contrainte 2} \\ x_1, x_2 \geq 0 \leftarrow \text{contraintes de non-négativité} \end{cases}$$

- On appelle variable de décision toute quantité utile à la résolution du problème et on doit déterminer sa valeur.
- On appelle contraintes du problème toutes les relations limitant le choix de valeurs possibles pour les variables.
- On appelle fonction objectif l'expression qui modélise la quantité à optimiser en fonction des variables du problème.

ENCGT

Exemple de formulation :

Exemple 1

Une usine produit deux types de ciments C_1 et C_2, rapportant respectivement 500Dh et 700Dh par tonne. Une tonne du ciment C_1 nécessite 40 min de calcination dans un four à chaux et 20 min de broyage. Une tonne du ciment C_2 nécessite 30 min de calcination dans un four à chaux et 30 min de broyage. Le four et l'atelier de broyage sont disponibles 6h et 8h par jour.
Combien de ciment de chaque type peut-on produire par jour pour maximiser le bénéfice ?

Modélisation du problème

- Etape 1 : Identification des variables de décision.
- Etape 2 : Identification des contraintes
- Etape 3 : Identification de la fonction objectif.

ENCGT

Exemple de formulation :

- **Identification des variables de décision** :
  Le profit total est fonction des quantités vendues des deux produits C_1 et C_2. Appelons :
  - x_1 : la quantité de C_1 à produire
  - x_2 : la quantité de C_2 à produire
- **Identification de la fonction objectif** :
  Le profit z s'obtient à partir de l'expression,
  $Z = 500x_1 + 700x_2$. L'objectif poursuivi consiste à trouver la combinaison des quantités x_1 et x_2 qui maximise le profit total Z : $\max Z = 500x_1 + 700x_2$
- **Identification des contraintes** : Les valeurs prises par x_1 et x_2 sont limitées par les quantités disponibles des ressources (four et broyeur) :
  $40x_1 + 30x_2 \leq 360$ (la disponibilité du four)
  $20x_1 + 30x_2 \leq 480$ (la disponibilité du broyeur).

ENCGT

Exemple de formulation :

- **Contraintes de non-négativité** :
  Elles assurent que les quantités achetées ne peuvent être que positives ou nulles :

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Le programme linéaire résultant s'écrit :

$$\max z = 500x_1 + 700x_2$$

$$\text{s.c} \begin{cases} 40x_1 + 30x_2 \leq 360 \\ 20x_1 + 30x_2 \leq 480 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

ENCGT

Exemple 2 : Production de la Peinture

Une société produit de la peinture d'intérieur et d'extérieur à partir de deux produits de base M1 et M2. Données :

	Quantité utilisée/ t Intérieure	Extérieure	Quantité disponible/j
M1	6	4	24
M2	1	2	6
Profit par tonne	5	4	

Contraintes supplémentaires :
- Demande maximum en peinture d'extérieur : 2 tonnes / jour.
- La production en peinture d'intérieur ne dépasse que d'une tonne celle d'extérieur.

Écrire le problème de maximisation du profit de cette entreprise sous la forme d'un programme linéaire.

Exemple 2 : Production de la Peinture

- **Identification des variables de décision :**
  Le profit total est fonction des quantités de la peinture d'intérieur et d'extérieur vendues . Appelons :
  - x_1 : quantités de peinture d'intérieur produites par jour
  - x_2 : quantités de peinture d'extérieur produites par jour
- **Identification de la fonction objectif à optimiser :**
  Le profit Z s'obtient à partir de l'expression, $Z = 5x_1 + 4x_2$.
  L'objectif poursuivi consiste à trouver la combinaison des quantités x_1 et x_2 qui maximise le profit total z :
  $\max Z = 5x_1 + 4x_2$
- **Identification des contraintes :** Les valeurs prises par x_1 et x_2 sont limitées par des restrictions :
  $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ (disponibilté de M1) ;
  $x_1 + 2x_2 \leq 6$ (disponibilté de M2) ;
  $x_2 \leq 2$ (demande maximale) ;
  $x_2 - x_1 \leq 1$

Exemple 2 : Production de la Peinture

- **Contraintes de non-négativité :**
  Elles assurent que les quantités achetées ne peuvent être que positives ou nulles :

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Le programme linéaire résultant s'écrit :

$$\max z = 5x_1 + 4x_2$$
$$\text{s.c} \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ 2x_1 + \quad x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 2 \\ x_2 - \quad x_1 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exemple 3 : Problème de Production

Pour fabriquer deux produits P1 et P2 on doit effectuer des opérations sur trois machines M1, M2 et M3, successivement mais dans un ordre quelconque. Les temps unitaires d'exécution sont donnés par le tableau suivant :

	M1	M2	M3
P1	11 mn	7 mn	6 mn
P2	9 mn	12 mn	16 mn

On supposera que les machines n'ont pas de temps d'inactivité.

La disponibilité pour chaque machine sont :
- 165 heures (9900 minutes) pour la machine M1 ;
- 140 heures (8400 minutes) pour la machine M2 ;
- 160 heures (9600 minutes) pour la machine M3 .

Le produit P1 donne un profit unitaire de 900 dh et le produit P2 un profit unitaire de 1000 dh.

Dans ces conditions, combien doit-on fabriquer mensuellement de produits P1 et P2 pour avoir un profit total maximum ?

Solution: Problème de Production

Formulation en un PL :

1- identifier les variables de décision:

Les variables de décisions sont :

x_1 : le nombre d'unités du produit P1 à fabriquer

x_2 : le nombre d'unités du produit P2 à fabriquer

2- identifier les contraintes :

Les contraintes sont :

- Pour la machine M1: $11x_1 + 9x_2 \leq 9900$
- Pour la machine M2: $7x_1 + 12x_2 \leq 8400$
- Pour la machine M3: $6x_1 + 16x_2 \leq 9600$

3- identifier la fonction objectif :

Le profit a maximiser est :

$$\text{Max } 900x_1 + 1000x_2$$

Solution: Problème de Production

Le programme linéaire résultant est :

$$\text{Max } 900x_1 + 1000x_2$$
$$\text{SC } 11x_1 + 9x_2 \leq 9900$$
$$7x_1 + 12x_2 \leq 8400$$
$$6x_1 + 16x_2 \leq 9600$$
$$x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0$$

2.3 Méthode de facteurs rares

Exemple 1:

Une entreprise fabrique deux produits (A et B), on utilisant une seule machine M; cette machine ne peut tourner plus de 100h.

- Pour fabriquer le produit A, il faut 2h
- Pour fabriquer le produit B, il faut 3h
- Le produit A dégage une marge de 10
- Le produit B dégage une marge de 18

Question : quel est le programme qui va maximiser la marge?

2.3 Méthode de facteurs rares

Voir cours

2.4 Méthode graphique

Résolution graphique du programme linéaire (PL)

- La **méthode graphique** est l'une des premières méthodes utilisées à ce sujet.
- Si on parle de résolution graphique alors on doit se limiter à une représentation à **deux variables**. Ceci indique que dans ce chapitre on examinera seulement les programmes linéaires à deux variables de décision.

ENCGT

2.4 Méthode graphique

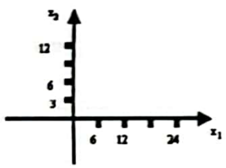
- Dans le PL chaque **contrainte** correspond a une droite d'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0$ qui divise géométriquement le plan en deux demi-plans, $a_1x_1 + a_2x_2 + b \geq 0$ et $a_1x_1 + a_2x_2 + b \leq 0$.
- L'intersection de tous les demi-plans représentatifs des contraintes forme la région des **solutions admissibles**, cet **ensemble est convexe (Polygne convexe).**

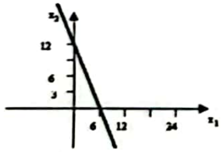
ENCGT

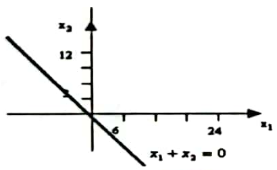
2.4 Méthode graphique

Résolution graphique du programme linéaire (PL)

- Tracer un repère cartésien orthonormé.
- Représenter graphiquement chacune des droites représentatives des équations limites des contraintes.
- Déterminer la région des solutions admissibles.
- Trouver la ou les solutions optimales







ENCGT

2.4 Méthode graphique

Recherche de la solution optimale

2.4.1 Méthode de recensement des sommets :

Nous évaluons la **valeur de la fonction objectif** dans **chaque sommet** de la région des solutions admissibles, la solution maximale (minimale) est où la fonction objectif est maximale (minimale) sur les sommets de la région des solutions admissibles.

Attention :*Cette méthode a des limites lorsque le nombre de sommets est relativement grand ou lorsque la région des solutions admissibles n'est pas bornée.*

ENCGT

10

2.4 Méthode graphique

Recherche de la solution optimale

2.4.2 Méthode de droite parallèle :

On translate vers le haut (Max) ou vers le bas (Min) **la droite parallèle à la fonction objectif et passant par l'origine, jusqu'au sommet (point ou segment) le plus éloigné (Max) ou le plus proche (Min) de la région des solutions admissibles.** Cette intersection, si elle existe, est **la solution optimale** pour PL, donc la solution est parmi les sommets de l'ensemble des solutions admissibles **(Si une telle intersection n'existe pas, cela veut dire que la solution est infinie).**

Notez que *toutes les droites parallèles à la fonction objectif ont le même pent (coefficient directeur).*

ENCGT

2.4 Méthode graphique

Quelques exemples :

voici quelques exemples de résolution graphique de problèmes linéaires relatifs au différents cas possibles :
Une Solution réalisable qui optimise (max ou min) la fonction économique. Elle peut être :

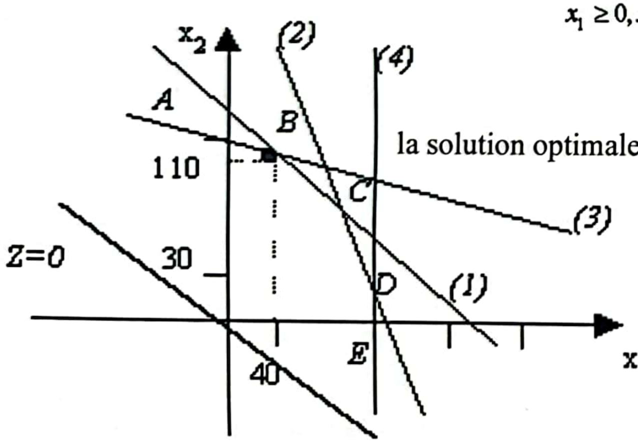
- **Unique** (Sommet du domaine réalisable)
- **Impossible** (contraintes incompatibles)
- **Multiple** (cote du domaine réalisable)
- **Infinie** (contraintes manquante)

ENCGT

2.4 Méthode graphique

Exemple 1: solution unique

$$\begin{array}{lll} Max & 100x_1 + 200x_2 & \\ s.c. & x_1 + x_2 \le 150 & (1) \\ & 4x_1 + 2x_2 \le 440 & (2) \\ & x_1 + 4x_2 \le 480 & (3) \\ & x_1 \qquad \le 90 & (4) \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 & \end{array}$$



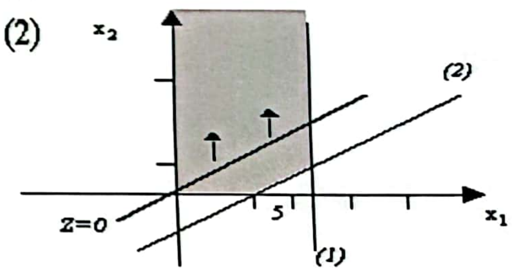
la solution optimale est **B(40,110)**

ENCGT

2.4 Méthode graphique

Exemple 2: la solution est non bornée

$$\begin{array}{lll} Max & -2x_1 + 3x_2 & \\ s.c. & x_1 \le 5 & (1) \\ & 2x_1 - 3x_2 \le 6 & (2) \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 & \end{array}$$



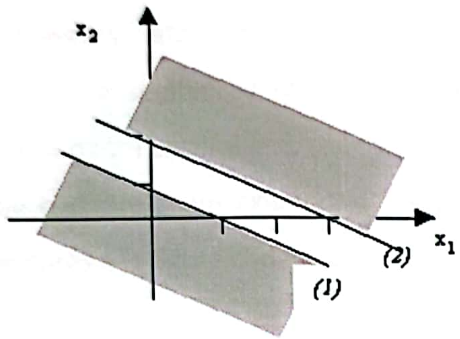
On peut augmenter la valeur de la fonction objectif dans la direction des flèches indéfiniment donc **la solution est non bornée**

ENCGT

2.4 Méthode graphique

Exemple 3: Problème impossible

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & 3x_1 + 2x_2 & \\ \text{s.c.} & x_1 + 2x_2 \le 2 & (1) \\ & 2x_1 + 4x_2 \ge 8 & (2) \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 & \end{array}$$

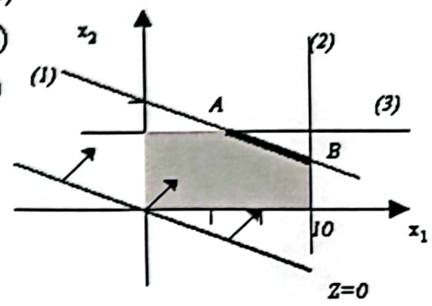


L'espace des solutions réalisables **est vide,** il est l'intersection des deux zones grises de cette figure.

2.4 Méthode graphique

Exemple 4: Problème à solutions multiples

$$\begin{array}{lll} \text{Max} & x_1 + 3x_2 & \\ \text{s.c.} & 2x_1 + 6x_2 \le 30 & (1) \\ & x_1 \le 10 & (2) \\ & x_2 \le 4 & (3) \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 & \end{array}$$

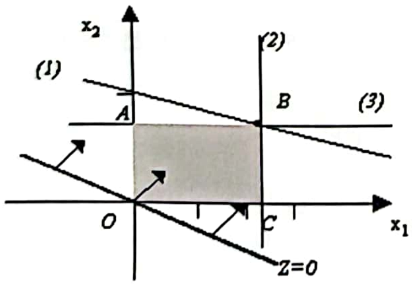


L'ensemble des points présents sur le segment situe **entre les deux point [AB]** correspondent a une **solution optimale. Il y a donc une infinité de solutions.**

2.4 Méthode graphique

Exemple 5: Problème de dégénérescence (a traiter au niveau du chapitre 3)

$$\begin{array}{lll} \text{Max} & x_1 + x_2 & \\ \text{s.c.} & 3x_1 + 2x_2 \le 40 & (1) \\ & x_1 \le 10 & (2) \\ & x_2 \le 5 & (3) \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 & \end{array}$$



La solution optimale **B(10,5)** est dite **dégénérée** si **trois contraintes concourent en ce point.**

2.4 Méthode graphique

la convexité , point extrême ?

Avant d'aborder l'algorithme du simplexe, la méthode graphique permet de bien visualiser les **principes de convexité et de point extrême**. Cette méthode permet de résoudre un problème d'optimisation linéaire.

2.4 Méthode graphique

Définition : la convexité

Un ensemble S est **convexe** si, étant donnés deux points distincts quelconques de cet ensemble, le segment qui relie ces deux points est contenu dans l'ensemble S.

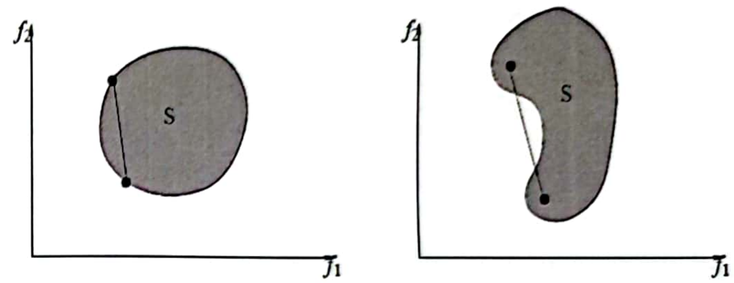
Un exemple d'ensemble convexe et un exemple d'ensemble non convexe sont représentés à la figure ci-dessous.

ENCGT

2.4 Méthode graphique

Définition : la convexité

Un ensemble S non vide est dit convexe si et seulement si pour tout élément x et y de S et pour tout $\lambda \in [0,1]$, $\lambda x + (1-\lambda) y \in S$.



(a) Un ensemble convexe   (b) Un ensemble non convexe

ENCGT

2.4 Méthode graphique

La convexité

Théorème :

L'intersection d'ensembles convexes (non vide) est convexe.

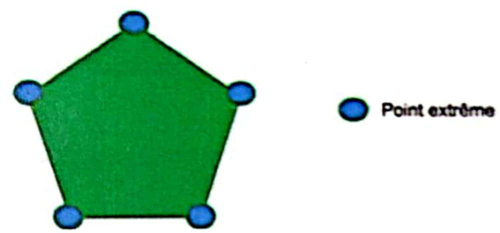
Propositions :

L'ensemble des solutions réalisables (non vide) est convexe.

ENCGT

2.4 Méthode graphique

Intuition géométrique: Point extrême



L'ensemble des solutions réalisables d'un PL, c'est-à-dire qui respectent toutes les contraintes et toutes les bornes sont nécessairement situées sur **des points extrêmes du domaine réalisable.** Le domaine réalisable englobe toutes les solutions qui respectent les contraintes et les bornes.

Ici, nous voyons **le domaine réalisable en vert et cinq points extrêmes en bleu.**

ENCGT

73

2.4 Méthode graphique

Intuition géométrique: Point extrême

Un point extrême $x \in S$ d'un ensemble convexe ne peut être exprime ainsi :

$$x = \lambda y + (1-\lambda)z,$$
$$y, z \in S, \lambda \in [0,1], \; z \neq x$$

En d'autres termes, si x ne peut pas être exprimé comme une combinaison convexe de y et z.

Forme compacte

Pour les variables de décision $x_1, x_2, \dots, x_n$, on cherche à :

Maximiser $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \text{ pour } i = 1, \dots, m \\ x_j \ge 0, \quad \text{pour } j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Forme canonique

Min $C^T x$ Ou **Max $C^T x$**

SC:
$$Ax \ge b$$
$$x \ge 0$$

SC:
$$Ax \le b$$
$$x \ge 0$$

A est une matrice de taille m*n
b est un vecteur de taille m
x et C sont des vecteurs de taille n.

On appelle **forme canonique (matricielle)** d'un PL , tout système d'inéquations linéaires (**contraintes ≤ , ou ≥)** conditionné par la **maximisation (ou min)** d'une fonction linéaire de n variables x_1, x_2, x_3... et x_n, **toutes positives.**

Forme canonique

Remarque

Certaines variables peuvent ne pas être forcés à être supérieures à 0.

Considérons la contrainte :

$$x_1 \ge -8 \rightarrow x_1 + 8 \ge 0$$

Nous pouvons alors définir $y = x + 8$ *, de sorte que la contrainte devient* $y \ge 0$.

Forme canonique

Remarque

De même considérons,

$$-6 \leq x \leq -2$$

en définissons $y = x + 6$, *nous avons la contrainte* $y \geq 0$.

2.5 Règles de transformation

Il est possible de transformer tout problème linéaire en une forme ou l'autre en utilisant les règles de transformation qui sont décrites ci-après.

D'abord, si la fonction-objectif est une **minimisation** et qu'une **maximisation** est voulue, **il s'agit simplement de multiplier la fonction par -1 (et vice versa)**.

Inversement, si le problème en est un de **maximisation** et qu'on désire plutôt **minimiser**, il faut aussi **multiplier la fonction-objectif par -1.**

Si le membre de droite d'une **contrainte est négatif (bi<0),** et que cette valeur **doit être positive** pour un problème écrit sous forme standard par exemple, il faut **multiplier les termes de la contrainte par -1 et inverser le signe de l'inégalité, s'il s'agit d'une inégalité.**

2.5 Règles de transformation

Pour écrire le programme sous **forme canonique**,
il faut éventuellement effectuer les transformations :

Minimiser W	→	Maximiser $Z = -W$
$ax \geq b$	→	$-ax \leq -b$

Ex : **Minimiser** W= $300x_1 + 800x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ 4x_1 + 5x_2 = 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

⟷

Ex : **Maximiser** Z = $-300x_1 - 800x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 \leq -8 \\ 4x_1 + 5x_2 = 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2.5 Règles de transformation

- **Pour les bornes (les variables de décisions)**

Si la borne inférieure d'une variable est différent de 0, ajouter une variable d'écart

$$x_1 \geq 3 \rightarrow x_1' = x_1 - 3$$

Si la variable n'a pas de bornes, la remplacer par deux variables d'écarts non-négatives.

$$x_1 \; libre \quad \rightarrow \quad x_1 = u - v \quad \text{avec } u, v \geq 0$$

2.5 Règles de transformation

- Pour les <u>contraintes d'inégalités</u>

$8x_1 + 3x_2 \leq 3 \quad \rightarrow \quad 8x_1 + 3x_2 + e_1 = 3$

$x_1 - 3x_2 \geq 3 \quad \rightarrow \quad x_1 - 3x_2 - e_2 = 3$

Pour transformer une contrainte d'inégalité en contrainte d'égalité, **il faut ajouter une variable d'écart si la contrainte est inférieure ou égale au membre de droite ou alors soustraire une variable de surplus si la contrainte est de la forme plus grande ou égale.**

2.5 Règles de transformation

Forme canonique		Forme standard
$AX \leq B$	$\Leftrightarrow$	$AX + I_m E = B$

Exemple :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ 3x_1 + 10x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + e_1 + 0 + 0 = 8 \\ 4x_1 + 5x_2 + 0 + e_2 + 0 = 20 \\ 3x_1 + 10x_2 + 0 + 0 + e_3 = 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Remarque: il faut soustraire une variable de surplus e1, dans le cas ou on a ≥

2.5 Règles de transformation

Exemple2 : écrire le programme linéaire suivant sous sa forme standard

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ 3x_1 + 10x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + e_1 + 0 + 0 = 8 \\ 4x_1 + 5x_2 + 0 + e_2 + 0 = 20 \\ 3x_1 + 10x_2 + 0 + 0 + e_3 = 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Remarque: il faut soustraire une variable de surplus s1, dans le cas ou on a ≥

2.5 Règles de transformation

Ecrire le problème suivant sous la forme standard:

$$\text{Max } 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \geq 24 & (1) \\ x_1 + 2x_2 \leq -6 & (2) \\ -x_1 + x_2 = 1 & (3) \end{cases}$$

$$x_1 \text{ libre}$$

$$0 \leq x_2 \leq 2$$

2.5 Règles de transformation

Solution

$$\text{Min } -5x_1 - 4x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - e_1 = 24 \\ -x_1 + 2x_2 + e_2 = 6 \\ x_1 = u - v \end{cases}$$

$$x_2 + e_3 = 2$$

Ou $x_1, x_2, u, v \geq 0$, $e_1 \geq 0$ et $e_2 \geq 0$

2.5 Règles de transformation

Ecrire le problème suivant sous **la forme standard:**

$$\text{Max } x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 & (1) \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 2 & (2) \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -3 & (3) \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

2.5 Règles de transformation

Solution

$$\textbf{Max } x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 & (1) \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 2 & (2) \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -3 & (3) \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow$$

Forme standard :

$$\textbf{-Min } -x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + e_1 = 1 & (1) \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - e_2 = 2 & (2) \\ -3x_1 + x_2 - x_3 = 3 & (3) \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0$$

Programmation linéaire

Application: Gestion de la production

Cas Production

1 lingot Acier LQ (300dh)

COKE, MINERAI DE FER	2kg
FOUR ELECTRIQUE	4kWh
LAMINAGE A CHAUD	3h

1 lingot Acier HQ (800dh)

COKE, MINERAI DE FER	1kg
FOUR ELECTRIQUE	5kWh
LAMINAGE A CHAUD	10h

Production par lot de 1000 lingots.

Les contraintes de l'entreprise sont sur **les ressources** :

COKE, MINERAI DE FER	FOUR ELECTRIQUE	LAMINAGE A CHAUD
8 000kg	20 000kWh	30 000h

Pb : Combien de lots de lingots de chaque type faut-il produire pour maximiser le chiffre d'affaires ?

Formalisation du problème

1) Variables de décision

On cherche :

- x_1= nb de lots de 1000 lingots de type LQ
- x_2= nb de lots de 1000 lingots de type HQ

2) Contraintes

Le programme (x_1,x_2) doit vérifier **« les contraintes »** :

- Matière première $\Rightarrow 2x_1 + x_2 \leq 8$
- Energie $\Rightarrow 4x_1 + 5x_2 \leq 20$
- Laminage $\Rightarrow 3x_1 + 10x_2 \leq 30$

on produit des quantités positives : **contraintes logiques** :

$x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$

ENCGT

Solutions

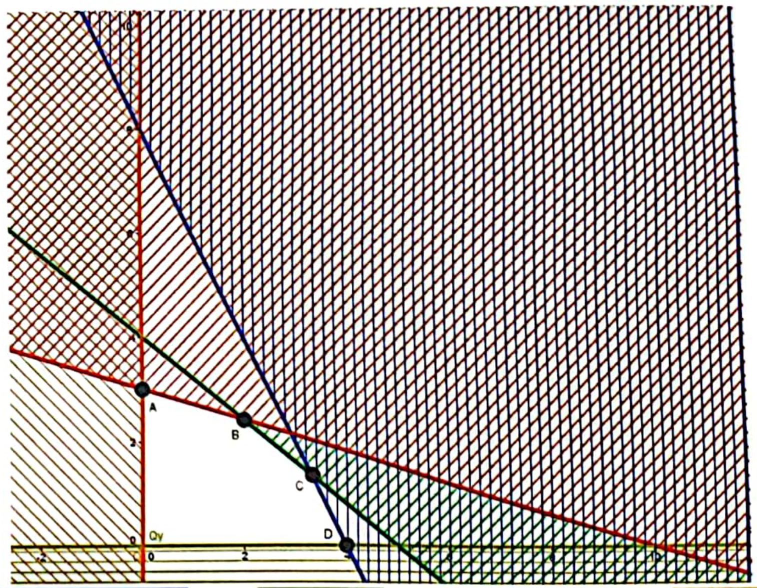
Solutions admissibles

On appelle **solution admissible** tout programme (x_1, x_2) **vérifiant tous les contraintes.**
Par exemple (x_1=0 , x_2 =0) est une **solution admissible.**

L'ensemble des solutions admissibles est, en général, infini :
c'est un polygone convexe = **un « simplexe »**

ENCGT

Représentation graphique

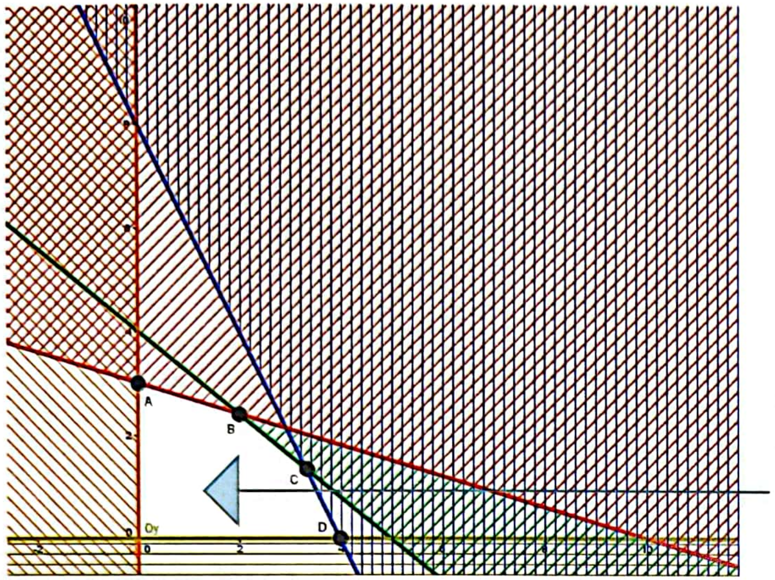


1)Matière premières 2)Energie 3)Laminage 4)Logique

78

Représentation graphique

OABCD est un polyèdre convexe



Région réalisable : ensemble des solutions réalisables

1)Matière premières | 2)Energie | 3)Laminage | 4)Logique

3) Critère d'optimisation – Fonction-objectif

Le programme (x_1, x_2) doit **maximiser** le chiffre d'affaires :

$$\max_{(x_1,x_2)} Z = 300x_1 + 800x_2$$

La fonction-objectif étant linéaire, et les contraintes étant des inéquations linéaires, on parle d'une **programmation linéaire**.

Solution optimale

On appelle **solution optimale** toute solution admissible (x_1^*, x_2^*) **optimisant** la fonction-objectif :

$$\forall\ (x_1, x_2),\ Z = 300x_1 + 800x_2 \leq Z^* = 300x_1^* + 800x_2^*$$

Solutions

Remarque 1 :

S'il existe une solution optimale, **alors elle est égale à un sommet du simplexe** de l'ensemble des solutions admissibles.

Corollaire:

Pour trouver **l'optimum**, il suffit d'examiner **les points extrêmes (OABCD) de la région réalisable.**

Plan du Chapitre 3

3.1 Algorithme du simplexe

3.2 Analyse de sensibilité

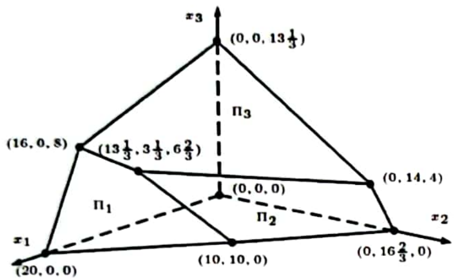
3.3 Applications

Algorithme du simplexe

- Pour 2 variables, l'ensemble des solutions admissibles est un **polygone convexe.** On peut utiliser la méthode graphique.

- Au-delà, la méthode graphique n'est plus utilisable.
On utilise alors **« l'algorithme du simplexe »**

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 50 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 40 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$



$$\max \quad z = 35x_1 + 38x_2 + 30x_3$$

ENCGT

Algorithme du simplexe

Algorithme du simplexe

1. **Ecrire** le problème sous **forme canonique** :
   Contraintes = Système d'inéquations : $AX \leq B$
2. **Ecrire** le problème sous **forme standard** en introduisant des variables d'écart :
   Contraintes = Système d'équations : $AX + I_m E = B$
3. **Utiliser** la méthode du **pivot** de GAUSS pour parcourir les sommets du simplexe :
   - **Partir** d'une solution admissible
   - **Parcourir** les sommets du simplexe
   - **S'arrêter** quand la fonction-objectif est maximale

ENCGT

Méthode du simplexe Dantzig(1947)

Deux phases:

– Phase1–Initialisation: Trouver une solution de base réalisable.

– Phase2–Progression: On passe d'un sommet à un sommet voisin pour augmenter la fonction objectif.

ENCGT

Algorithme simplexe :

Debut
Tant que qu'il existe un coefficient strictement positif dans la fonction objectif faire
debut
choisir la variable entrante dans la base : c'est la variable associée au plus grand coefficit $c_e > 0$.
Si tous les $a_{ie} \leq 0$ (les valeurs dans la colonne de la variable entrante) STOP
le problème est non borné($\max z = +\infty$)
Sinon
Choisir la variable sortante x_s telle que
$\frac{b_s}{a_{se}} = \min\{\frac{b_i}{a_{ie}}, a_{ie} > 0, i = 1, \cdots, m\}$
Pivotage
Fin début
Fin Tant que
Si tous les $c_i \leq 0$, la solution optimale est trouvée.
Fin début

Algorithme simplexe :

$$Max\ Z = 300x_1 + 800x_2$$

SC

$$2x_1 + x_2 \leq 8 \quad (Matière\ Première)$$
$$4x_1 + 5x_2 \leq 20 \quad (Energie)$$
$$3x_1 + 10x_2 \leq 30 \quad (Laminage)$$
$$x_1 \geq 0\ x_2 \geq 0$$

Etape 0 : tableau initial

$$AX + I_mE = B \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + e_1 + 0 + 0 = 8 \\ 4x_1 + 5x_2 + 0 + e_2 + 0 = 20 \\ 3x_1 + 10x_2 + 0 + 0 + e_3 = 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Base	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b_i
e_1	2	1	1	0	0	8
e_2	4	5	0	1	0	20
e_3	3	10	0	0	1	30

$$-Z + 300x_1 + 800x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 = 0$$

-Z	300	800	0	0	0	0

ENCGT

Etape 0 : tableau initial

Base	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b_i
e_1	2	1	1	0	0	8
e_2	4	5	0	1	0	20
e_3	3	10	0	0	1	30
	300	800	0	0	0	-Z = 0

- Les variables e_1, e_2, e_3 sont **dans la base :**
  - on reconnait la matrice identité
  - leur valeur est dans la colonne **Résultat** ;
- Les variables x_1, x_2 sont **hors-base**, donc **mises à 0**
- La fonction-objectif s'écrit en fonction des variables hors-base : **coefficients non nuls pour les variables hors-base.**
- On lit **la valeur de –Z** dans Résultat.

ENCGT

Etape 1 : choix du pivot

Base	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b_i	Rapport
e_1	2	1	1	0	0	8	8/1=8
e_2	4	5	0	1	0	20	20/5=4
e_3	3	10	0	0	1	30	30/10=3
-Z	300	800	0	0	0	0	

1) Variable entrant : plus **grand** coefficient de la fonction objective

2) Variable sortant : plus **petit** rapport

On obtient ainsi le coefficient qui va servir de **pivot**

ENCGT

Scanné avec CamScanner

Etape 2 : mise à jour du tableau

Base	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b_i
e_1	2	1	1	0	0	8
e_2	4	5	0	1	0	20
e_3	3	10	0	0	1	30
-Z	300	800	0	0	0	0

	Base	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b_i
$L_1 = L_1 - \frac{1}{10} L_3$	e_1	7/10	0	1	0	- 1/10	5
$L_2 = L_2 - \frac{5}{10} L_3$	e_2	5/2	0	0	1	- 1/2	5
$L_3 = \frac{1}{10} L_3$	x_2	3/10	1	0	0	1/10	3
$L_4 = L_4 - \frac{800}{10} L_3$	-Z	60	0	0	0	- 80	-2 400

ENCGT

Itération étape 1

Base	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b_i
e_1	7/10	0	1	0	-1/10	5
e_2	5/2	0	0	1	- 1/2	5
x_2	3/10	1	0	0	1/10	3
-Z	60	0	0	0	-80	-2 400

Variable entrant dans la base : x_1

Variable sortant de la base : e_2

Itération étape 2

Base	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b_i
e_1	7/10	0	1	0	-1/10	5
e_2	5/2	0	0	1	-1/5	5
x_5	3/10	1	0	0	1/10	3
-z	60	0	0	-80	0	-2 400

	Base	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b_i
$L_1 = L_1 - \frac{0,7}{2,5} L_2$	e_1	0	0	1	- 7/25	1/25	3/2
$L_2 = \frac{5}{2} L_2$	x_1	1	0	0	2/5	- 1/5	2
$L_3 = L_3 - \frac{0,3}{2,5} L_2$	x_2	0	1	0	-3/25	8/50	24/10
$L_4 = L_4 - \frac{60}{2,5} L_4$	-Z	0	0	0	-24	-68	-2 520

Et on recommence à l'étape 1, si l'on peut **améliorer** la fonction-objectif.

Arrêt de l'algorithme

Base	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b_i
e_1	0	0	1	-0,68	0,24	1,6
x_1	1	0	0	0,4	-0,2	2
x_2	0	1	0	-0,12	0,16	2,4
-Z	0	0	0	-24	-68	-2 520

Le programme **est donc <u>optimum</u>** : on lit dans Résultat :

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2,4 \end{cases} \qquad \Rightarrow Z = 2520$$

Algorithme du simplexe

- Une solution de base réalisable est dite **dégénérée** si au moins une **des variables de base est nulle**.

- **Théorème**: Si au cours de l'algorithme du simplexe, aucune base rencontrée n'est dégénérée, alors l'algorithme se termine en un nombre fini d'itérations.

- Par conséquent, on ne rencontre jamais une base déjà rencontrée à une itération précédente. Le nombre de solution de base réalisable étant fini, l'algorithme s'arrête nécessairement en un nombre fini d'itérations.

Algorithme du simplexe

- **Remarque :** S'il existe une base dégénérée, alors on peut rencontrer un éventuel cyclage de l'algorithme: on retrouve une base déjà rencontrée et on boucle indéfiniment.

- **Règle de Bland (1977) :** Lorsque plusieurs variables sont susceptibles d'entrer ou de sortir de la base, on choisit toujours celle qui a l'indice le plus petit.

Complexité du simplexe:

Complexité = nombre d'itération dans le simplexe (phase 2).

- On peut construire des exemples avec une complexité exponentielle en $O(2^n)$ itérations (**Klee-Minty, 1972**).
- Mais dans la pratique la complexité du simplexe croît peu avec le nombre nnde variables. En pratique, le nombre d'itérations est proportionnel au nombre m de contraintes (de m à $3m$ itérations).
- Si on tient compte de la résolution des systèmes linéaires avec une formule de mise à jour de l'inverse (**Shermann-Morrison**), on a $O(\mathbf{m}^2)$opérations pour l'inverse.

Exercice 1 : Simplexe

Résoudre le programme linéaire suivant en utilisant la méthode de simplexe.

$$\begin{aligned} & Max\ 3x_1 + 2x_2 \\ SC\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ & x_1 - x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Solution exercice 1

Forme standard :

→ La forme standard du programme linéaire s'écrit comme suit :

$$Max\ 3x_1 + 2x_2$$
$$SC\ -x_1 + 2x_2 + e_1 = 4$$
$$3x_1 + 2x_2 + e_2 = 4$$
$$x_1 - x_2 + e_3 = 3$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0,\ e_3 \geq 0$$

Solution exercice 1

→ Tableau de simplexe initial (1ère itération)

Base	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b_i
e_1	-1	2	1	0	0	4
e_2	3	2	0	1	0	14
e_3	1	-1	0	0	1	3
-Z =	0	0	0	0	0	

Solution exercice 1

→ (2eme itération)

Base	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b_i
e_1	0	1	1	0	1	7
e_2	0	5	0	1	-3	5
x_1	1	-1	0	0	1	3
-Z =	0	5	0	0	-3	-9

Solution exercice 1

→ (3ème itération)

Base	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b_i
e_1	0	0	1	-1/5	8/5	6
x_2	0	1	0	1/5	-3/5	1
x_1	1	0	0	1/5	2/5	4
-Z =	0	0	0	-1	0	-14

Tous les *coefficient* ≤ 0 donc le tableau de simplexe est **optimal** et la **solution optimal** du PL est: $x_1 = 4$; $x_2 = 1$; $e_1 = 6$; $e_2 = 0$; $e_3 = 0$

La valeur de la fonction objectif est 14.

Remarque

Base	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	b_i
e_1	0	0	1	-1/5	8/5	6
x_2	0	1	0	1/5	-3/5	1
x_1	1	0	0	1/5	2/5	4
-Z =	0	0	0	-1	0	-14

L'effet net de l'augmentation d'une unité de la valeur de **e_3 (variable hors base)** est nul. Donc si on introduit e_3 dans la base, on ne modifie pas la valeur de la fonction objectif. Ainsi une autre solution optimale peut être trouvée pour notre programme linéaire. Ceci confirme le résultat de la méthode graphique qui indique que ce problème admet un ensemble de solution optimale décrit par un segment [ ].

ENCGT

Exercice 2 : Simplexe

Résoudre le programme linéaire suivant en utilisant la méthode de simplexe.

$$Max\ Z = 5x_1 + 4x_2$$
$$SC \quad 6x_1 + 4x_2 \leq 24$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$x_2 \leq 2$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1$$
$$x_1 \geq 0\ x_2 \geq 0$$

ENCGT

Solution Exercice 2 : Simplexe

Forme standard :

$$Max\ Z = 5x_1 + 4x_2$$
$$SC \quad 6x_1 + 4x_2 + e_1 = 24$$
$$x_1 + 2x_2 + e_2 = 6$$
$$x_2 + e_3 = 2$$
$$-x_1 + x_2 + e_4 = 1$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0,\ e_3 \geq 0,\ e_4 \geq 0$$

ENCGT

Solution Exercice 2 : Simplexe

$$Max\ Z = 5x_1 + 4x_2$$
$$SC \quad 6x_1 + 4x_2 + e_1 = 24$$
$$x_1 + 2x_2 + e_2 = 6$$
$$x_2 + e_3 = 2$$
$$-x_1 + x_2 + e_4 = 1$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0,\ e_3 \geq 0,\ e_4 \geq 0$$

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	b_i	$\theta^i = \frac{b_i}{a_{ie}}$
e_1	6	4	1	0	0	0	24	
e_2	1	1	0	1	0	0	6	
e_3	0	0	0	0	1	0	2	
e_4	-1	-1	0	0	0	1	1	
- Z	5	4	0	0	0	0	0	

Solution Exercice 2 : Simplexe

$$Max\ Z = 5x_1 + 4x_2$$
$$SC\quad 6x_1 + 4x_2 + e_1 = 24$$
$$x_1 + 2x_2 + e_2 = 6$$
$$x_2 + e_3 = 2$$
$$-x_1 + x_2 + e_4 = 1$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ e_1 \geq 0,\ e_2 \geq 0,\ e_3 \geq 0,\ e_4 \geq 0$$

	X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	e_4	b_i	$\theta^i = \frac{b_i}{a_{ie}}$
e_1	6	4	1	0	0	0	24	4
e_2	1	1	0	1	0	0	6	6
e_3	0	0	0	0	1	0	2	-
e_4	-1	-1	0	0	0	1	1	-
- Z	5	4	0	0	0	0	0	-

Solution Exercice 2 : Simplexe

→ Tableau de simplexe initial (1ère itération)

	X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	e_4	b_i	$\theta^i = \frac{b_i}{a_{ie}}$
e_1	6	4	1	0	0	0	24	4
e_2	1	1	0	1	0	0	6	6
e_3	0	0	0	0	1	0	2	-
e_4	-1	-1	0	0	0	1	1	-
- Z	5	4	0	0	0	0	0	-

Solution Exercice 2 : Simplexe

	X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	e_4	b_i	$\theta^i = \frac{b_i}{a_{ie}}$
e_1	**6**	**4**	**1**	**0**	**0**	**0**	**24**	**4**
e_2	**1**	1	0	1	0	0	6	6
e_3	**0**	0	0	0	1	0	2	-
e_4	**-1**	-1	0	0	0	1	1	-
- Z	**5**	4	0	0	0	0	0	-

Solution Exercice 2 : Simplexe

→ (2eme itération)

	X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	e_4	b_i	$\theta^i = \frac{b_i}{a_{ie}}$
x_1	1	2/3	1/6	0	0	0	4	6
e_2	0	4/3	-1/6	1	0	0	2	3/2
e_3	0	1	0	0	1	0	2	2
e_4	0	5/3	1/6	0	0	1	5	3
- Z	0	2/3	-5/6	0	0	0	-20	-

26

105

Solution Exercice 2 : Simplexe

→ (le dernier tableau)

	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	b_i
x_1	1	0	1/4	-1/2	0	0	3
x_2	0	1	-1/6	1	0	0	3/2
e_3	0	0	0	0	1	0	1/2
e_4	0	0	0	0	0	1	5/2
- Z	0	0	-3/4	-1/2	0	0	-21

la solution de base réalisable obtenue : (3; 3/2; 0;0;1/2; 5/2)
La solution optimale est donc la suivante : (3 ; 3/2)
La valeur max de la fct objectif est Z* = 21

106

Application (A faire)

Une entreprise alpha produit **des chaises et des tables** à partir d'un stock de **16 unités de bois, 10 unités** de tissu et emploie **un ouvrier qui fournit 40 heures de travail par semaine**.

- Pour produire une ***chaise*** il faut **1 heure de travail, une unité de bois et une unité de tissu;**
- Pour produire une ***table*** il faut **4 heures de travail et 1 unité de bois.**
- Le prix d'une chaise est de **100 Unités-Monétaire (UM) et celui d'une table de 200 UM.**

- L'entrepreneur désire déterminer la production hebdomadaire des chaises et des tables permettant de **maximiser son chiffre d'affaires.**

Retrouvez la production optimale via l'algorithme de simplexe?

107

Résumé de la procédure de la méthode du simplexe

Etapes	Justification
1. Formuler un programme linéaire pour le problème réel.	Pour obtenir une représentation mathématique du problème
2. Vérifier que le second membre du programme linéaire est positif	Ceci est nécessaire pour obtenir comme variable de base initiale l'origine
3. Ecrire le programme linéaire sous une forme standard	Mettre toutes les contraintes sous forme d'égalité
4. Construire le premier tableau de simplexe	Ce tableau correspond à la solution initiale de base
5. Choisir comme variable entrante dans la base celle qui admet le plus grand effet net positif c_j-z_j.	La valeur de c_j-z_j indique la quantité d'augmentation de la fonction objectif si on augmente la valeur de x_j d'une unité.
6. Choisir la variable sortante de la base celle qui admet le plus petit ratio supérieur à zéro.	La plus petite valeur de b_i/a_{ij} indique le nombre maximal d'unité de x_j qu'on peut introduire avant que la variable de base de l'ième ligne ne soit égale à zéro.
7. Construire le nouveau tableau en utilisant la règle de pivot	Cette règle nous permet entre autre de calculer les valeurs des nouvelles variables de décision
8. Faire le test d'optimalité. Si (c_j-z_j) ≤0 pour toutes les variables (hors base), la solution obtenue est donc optimale. Sinon retourner à l'étape 5.	Si (c_j-z_j) ≤0 alors on n'a pas d'intérêt à faire entrer dans la base aucune de ces variables. Une telle introduction engendra une diminution de la fonction objectif.

108

Chap. 3 Algorithme du simplexe

3.2 Analyse de sensibilité

- Fonction-objectif
- Contraintes

ENCGT

27

Chap. 3 Algorithme du simplexe

3.3 Applications

- A faire ultérieurement

ENCGT

Chap. 4 - Dualité

Dualité en Programmation Linéaire

Algorithmes primal et dual du simplexe

ENCGT

Plan du Chapitre 4

ENCGT

Logiciel pour la résolution des programmes linéaires : LINDO (Linear INteractive and Discrete Optimizer)

ENCGT