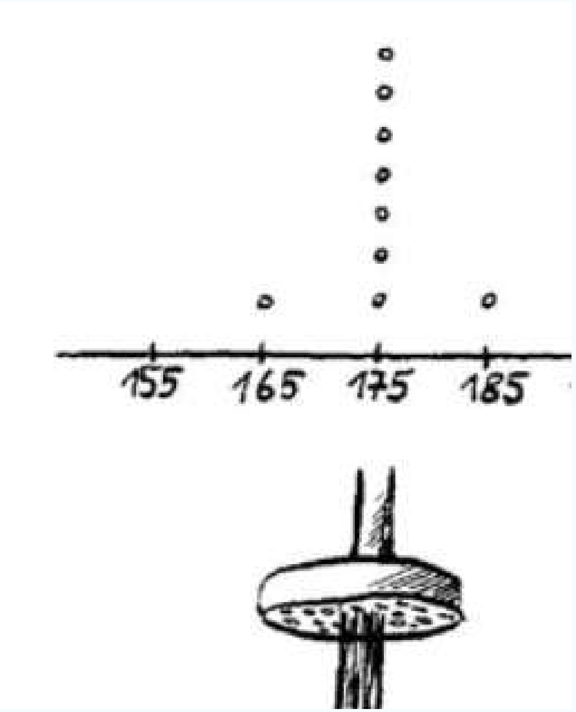
Université Abdelmalek Essaadi
ENCG - TANGER

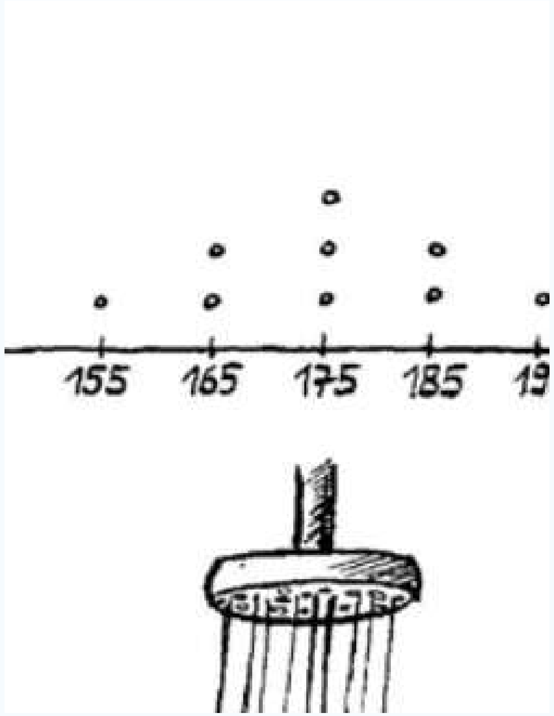
Semestre 2

chap5 : Les caractéristiques de forme

Prof: Abdelali ZBAKH <a.zbakh@uae.ac.ma>

Rappel : dispersion





Statistique Descriptive

Rappel: Comparaison Mode-Moyenne- Médiane

Il n’y a pas de règle générale entre les trois quantités. On peut distinguer cependant trois cas :

- Si la distribution est symétrique :

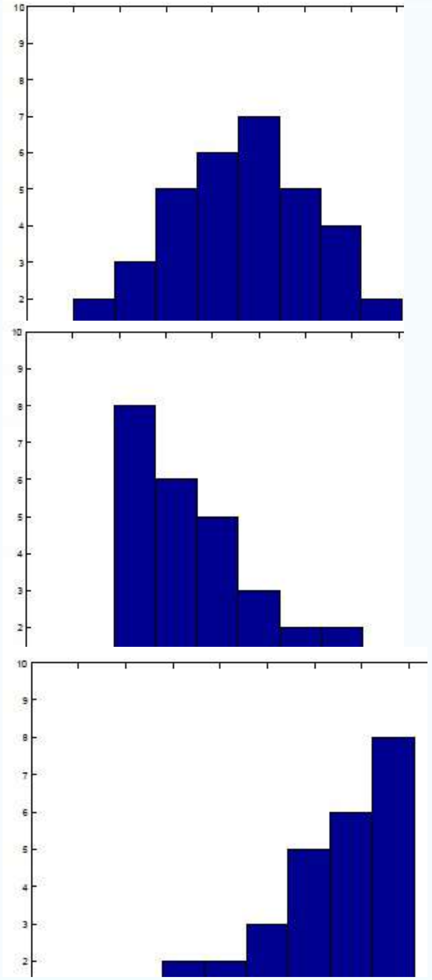
mode ≃ moyenne ≃ médiane

- Si la distribution est disymétrique étalée à droite :

mode < médiane < moyenne

- Si la distribution est disymétrique étalée à gauche :

moyenne < médiane < mode



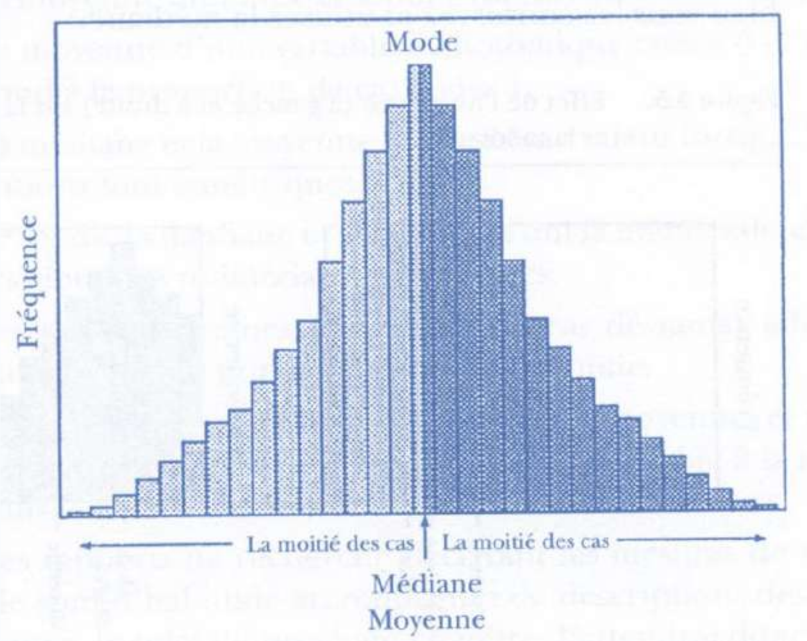
Comment calculer l’asymétrie d’une série statistique ?

Mesure de l’asymétrie

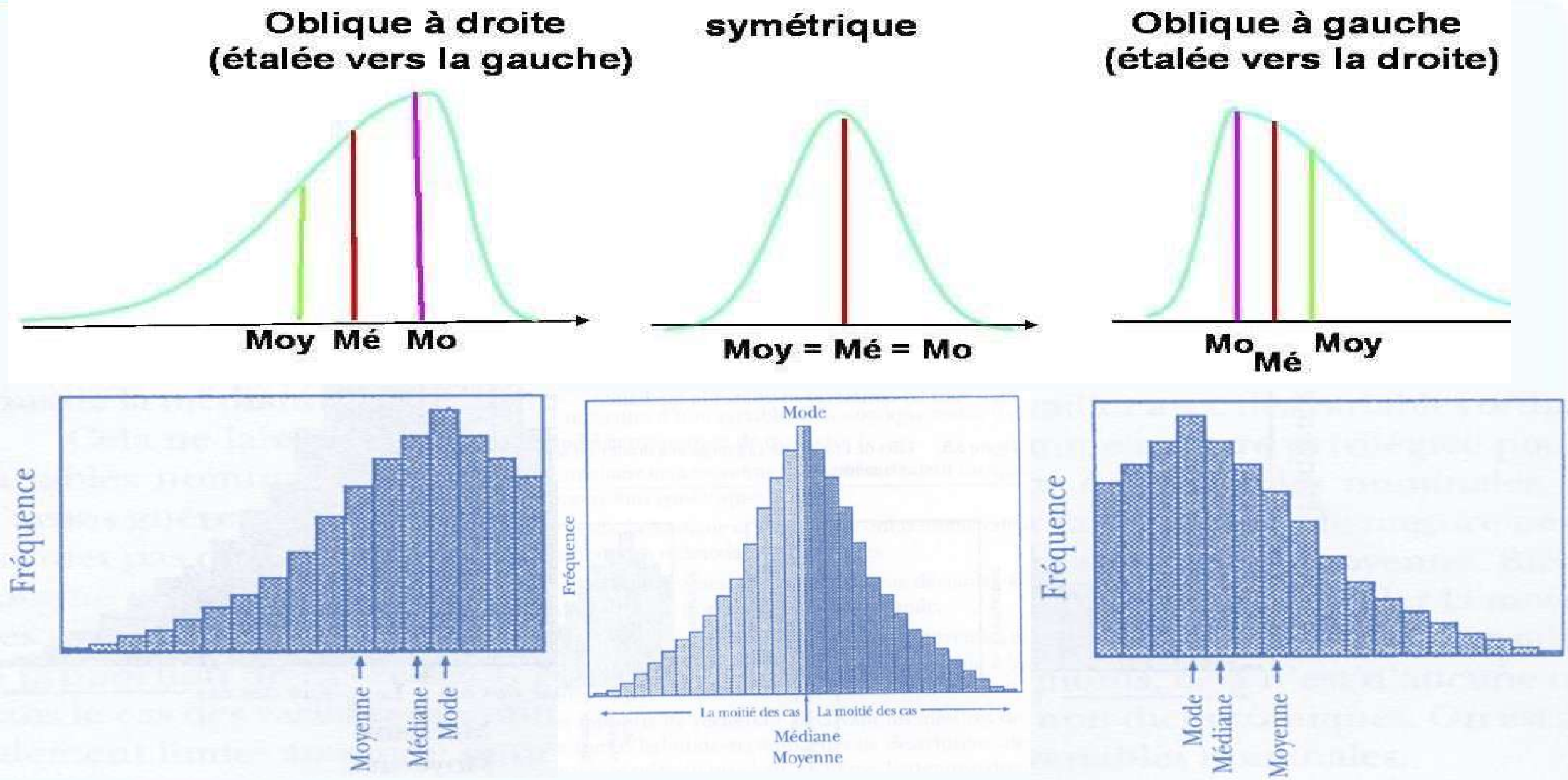
Une série a une distribution symétrique si ses valeurs sont également dispersées de part et d’autre de la valeur centrale, c’est-à-dire si le graphe de la distribution (histogramme ou diagramme en bâtons en fréquences) admet un axe de symétrie.

- Dans une distribution **parfaitement symétrique**, on a

$$Me = Mo = \bar{x}$$



chap5 : Les caractéristiques de forme (Indicateurs de forme)



Statistique Descriptive

Mesure de l'asymétrie

Certains coefficients (indices) permettent de situer la distribution dans un des trois cas précédents:

- ✓ **Cœfficient de Yule (C_Y)**
- ✓ **Cœfficient de Pearson (δ)**
- ✓ **Cœfficient de Fisher (γ)**

Mesure de l'asymétrie : Cœfficient de Yule

Le cœfficient de Yule , s'exprime par :

$$C_Y = \frac{(Q_3 - Me) - (Me - Q_1)}{(Q_3 - Me) + (Me - Q_1)}$$

$$C_Y = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Me}{Q_3 - Q_1}$$

- **Si $C_Y = 0$ alors la distribution est symétrique.**
- **Si $C_Y > 0$ alors la distribution est étirée vers la droite.**
- **Si $C_Y < 0$ alors la distribution est étirée vers la gauche**

Avec

- Me: la médiane de la série.
- Q1 et Q3 sont, respectivement, le premier quartile et le troisième quartile de la série.

Pour les déciles:

$$C_Y = \frac{(D_9 - D_5) - (D_5 -}{(D_9 - D_1)}$$

Mesure de l'asymétrie : Cœfficient de Pearson

Le cœfficient de Pearson , s'exprime par :

$$\delta = \frac{\overline{x} - Mo}{\sigma}$$

- Si $\delta = 0$ alors la distribution est symétrique.
- Si $\delta > 0$ alors la distribution est étirée vers la droite.
- Si $\delta < 0$ alors la distribution est étirée vers la gauche

Avec

- $\overline{x}$: c'est la moyenne arithmétique de la série.
- Mo : c'est le mode de la série.
- σ : c'est l'écart type de la série

Remarque : on a toujours

$$-1 \leq \delta \leq 1$$

Mesure de l'asymétrie : Cœfficient de Fisher

Le cœfficient de Fisher , s'exprime par :

$$\gamma = \frac{m_3}{\sigma^3}$$

- **Si $\gamma = 0$ alors la distribution est symétrique.**
- **Si $\gamma > 0$ alors la distribution est étirée vers la droite.**
- **Si $\gamma < 0$ alors la distribution est étirée vers la gauche**

Avec

- m_3: c'est le moment centré d'ordre 3
- σ : c'est l'écart type de la série

Statistique Descriptive

Mesure de l'asymétrie : Cœfficient de Fisher

Moments: On appelle moments à l'origine d'ordre $r \in \mathbb{N}$, le paramètre :

- Cas d'une série discrète:

$$m'_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r \qquad m'_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^r$$

- Cas d'une série continue, avec c_i le centre de la classe

$$m'_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i c_i^r$$

Mesure de l'asymétrie : Cœfficient de Fisher

Moments centrés: On appelle moments centrés d'ordre $r \in \mathbb{N}$,le paramètre:

$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^r$$

- Cas d'une série discrète:

$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x})^r$$

- Cas d'une série continue:

avec c_i le centre de la classe

$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(c_i - \bar{x})^r$$

Mesure de l'asymétrie : Cœfficient de Fisher

Moments : Cas particuliers

$$m_1' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x} \;\Rightarrow\; \text{Moyenne arithmétique}$$

$$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x} = 0$$

$$m_2' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = V_x^2 + \bar{x}^2 \;\Rightarrow\; \text{d'après théorème Koenig}$$

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = V_x \;\Rightarrow\; \text{Variance}$$

Mesure de l'asymétrie :

Exemple:

Classes	n_i	Ni cc
[50,70[	6	6
[70,100[	9	15
[100,130[	15	30
[130,150[	23	53
[150,180[	17	70
[180,200[	5	75
Total	75	

- Mesurer l'asymétrie?

✓ **Cœfficient de Yule:**

$$C_Y = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Me}{Q_3 - Q_1} = \frac{155.7 + 107.5 - 2\times 136.5}{155.7 - 107.5} = -0.2 < 0$$

✓ **Cœfficient de Pearson :** $\delta = \frac{\bar{x} - M}{\sigma}$

$$\delta = \frac{131 - 141,42}{\sigma} = \frac{131 - 141,42}{35,03} = -0,29 < 0$$

✓ **Cœfficient de Fisher:**

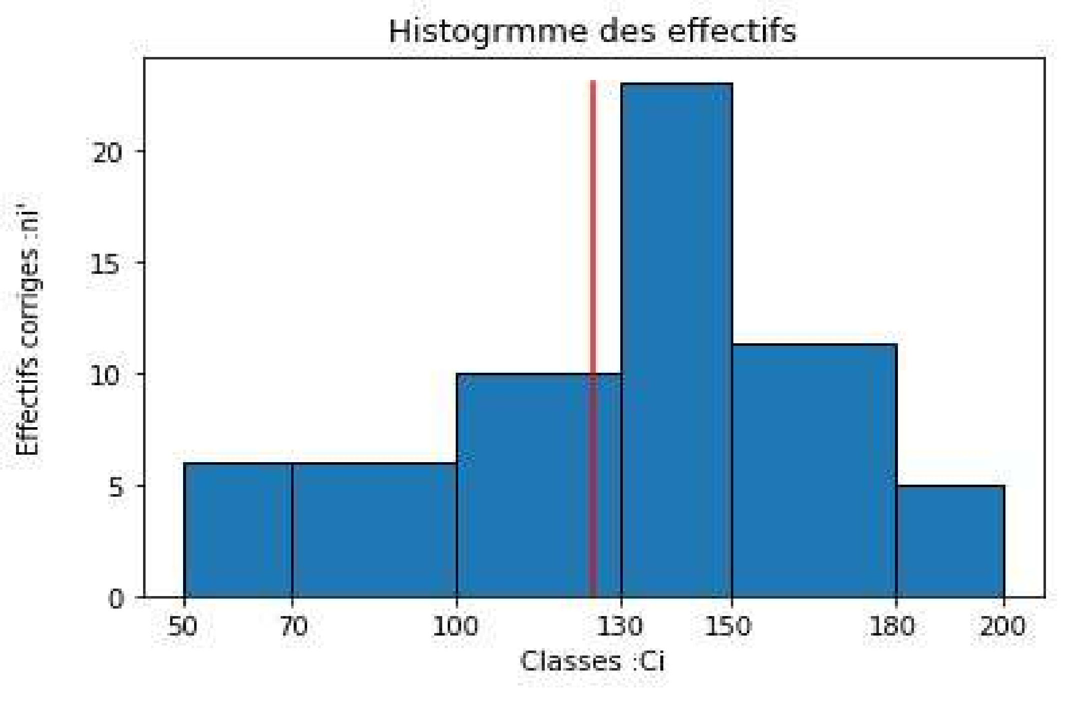
$$\gamma = \frac{m}{\sigma}$$

Moyenne	=	13
Variance	=	1227
Ecart type	=	35,0
Moment d'ordre 3	=	-18
Coefficient de Fisher =		-18308/

Mesure de l'asymétrie :

Exemple:

Donc la distribution est étirée vers la gauche.

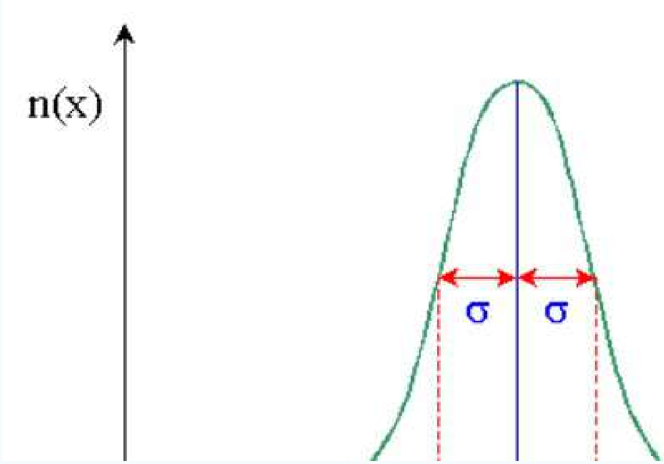


Mesure de l'aplatissement:

Les indicateurs d'asymétrie et d'aplatissement permettent de faire la comparaison entre les distributions statistiques.

- L' asymétrie : d'une distribution peut être approchée par une comparaison entre le mode, la médiane et la moyenne arithmétique.
- L' aplatissement peut être approchée par l'étude des observations aux alentours du mode.
  - ✓ Plus le nombre d'individus aura une valeur proche du mode de la distribution plus la courbe sera concentrée et plus l'aplatissement sera faible.
  - ✓ Dans la pratique, pour mesurer l'aplatissement d'une série on compare le graphique de la série avec la distribution dite normale.

Mesure de l'aplatissement: Présentation de la loi normale



- La loi normale représente une distribution théorique qui est parfaitement connue sur le plan mathématique. Elle a été définie par Laplace et Gauss. Son graphique est de la forme d'une «cloche»(beaucoup d'individus autour de la moyenne ; de moins en moins au fur à mesure qu'on s'en éloigne, et ceci de façon symétrique).
- L'équation de la courbe de fréquence d'une distribution normale ne dépend que de deux paramètres :
  - ✓ la moyenne de la variable (m) ;
  - ✓ l'écart type de la variable (σ).

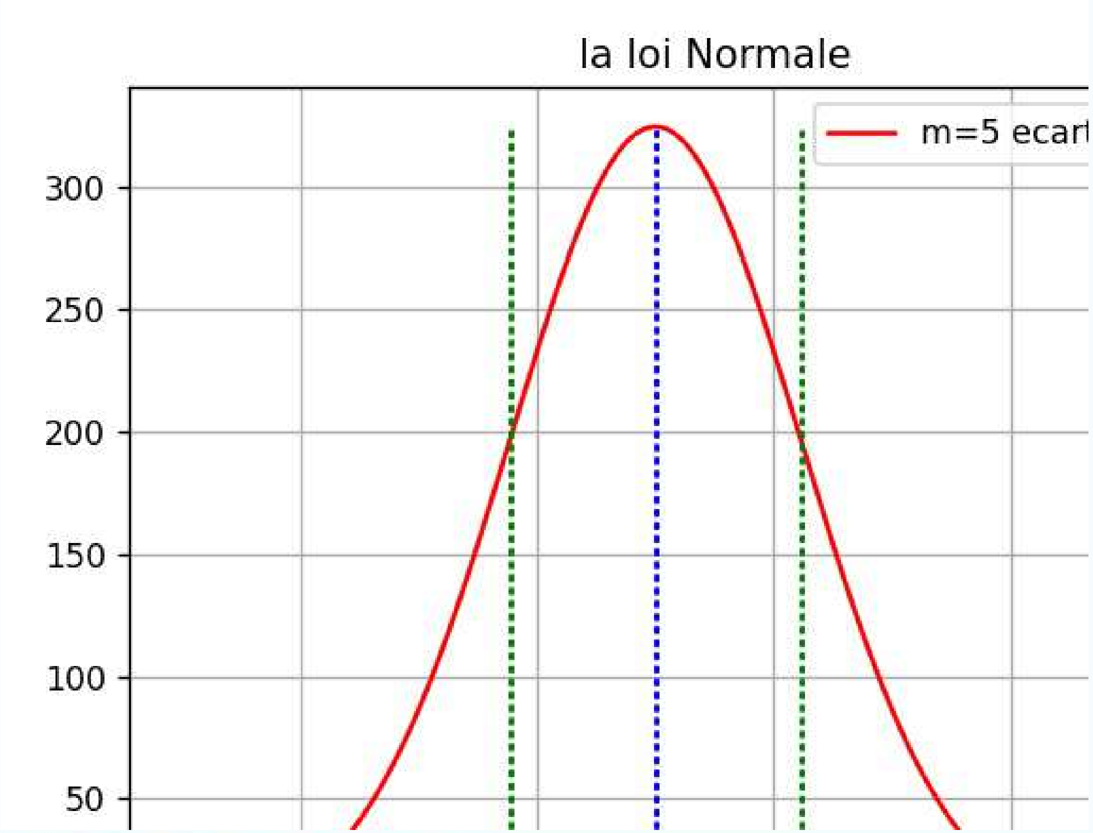
$$n(x) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x\cdot}{2}}$$

- N: le nombre total d'individus dans l'échantillon
- n(x) le nombre d'individus pour lesquels la grandeur analysée a la valeur x

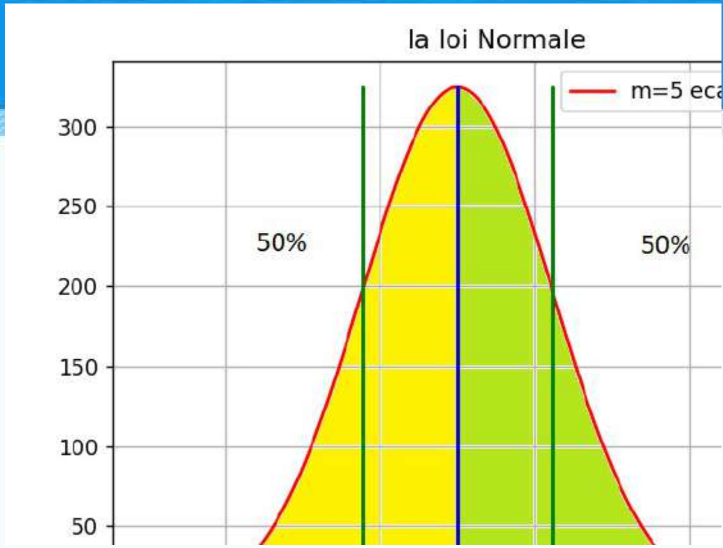
Statistique Descriptive

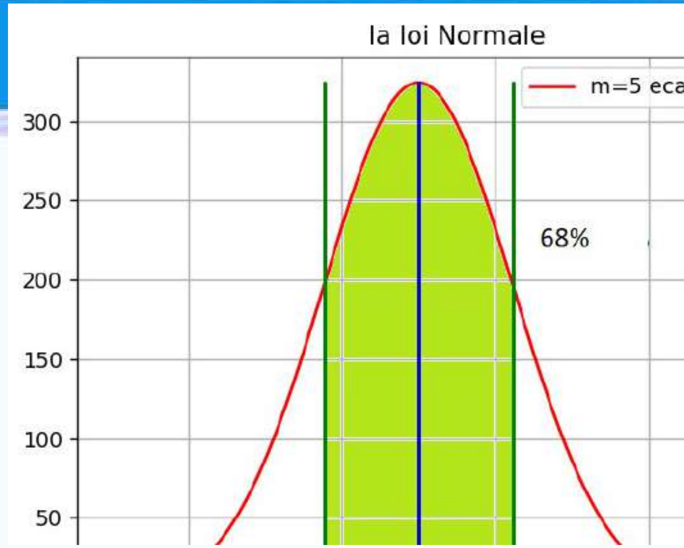
Mesure de l’aplatissement: Présentation de la loi normale

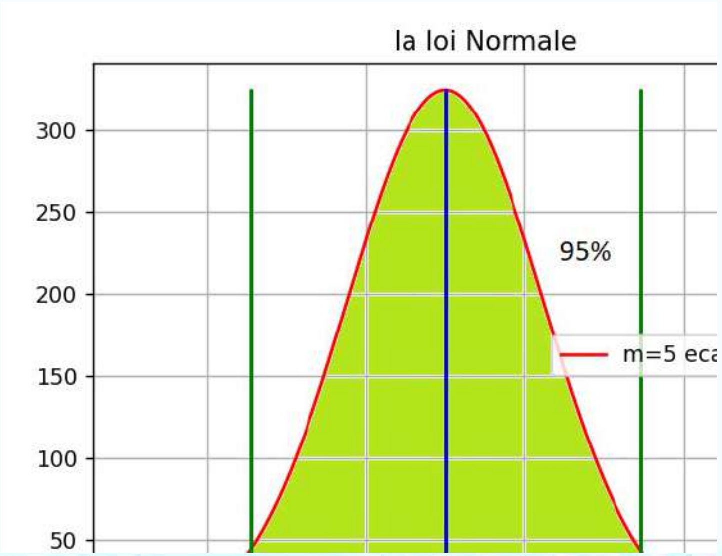
- Exemple:

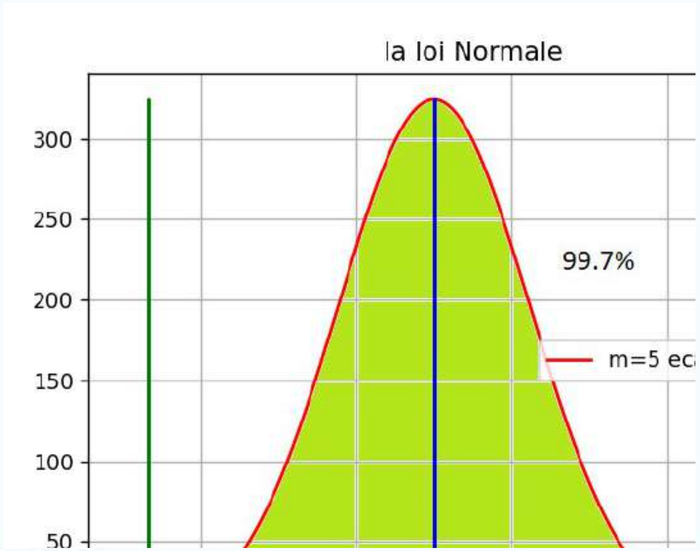


Statistique Descriptive









Mesure de l'aplatissement:

- Une distribution peut être plus ou moins aplatie selon qu'une proportion plus ou moins grande des observations est proche de son mode.
- Lorsqu'une forte proportion des observations prend une valeur proche de celle du mode de la distribution, l'aplatissement est faible.

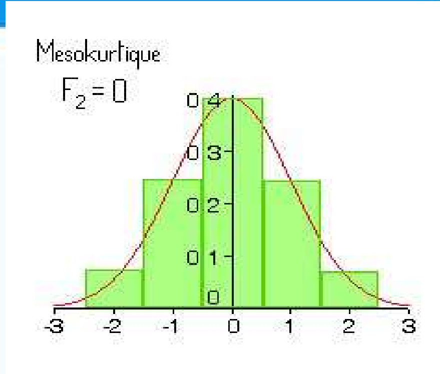
On parle d'une distribution :

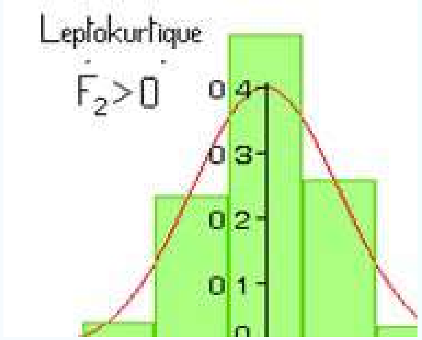
✓ **mésokurtique**, si cette distribution est similaire à une distribution normale centrée réduite (N(0,1))

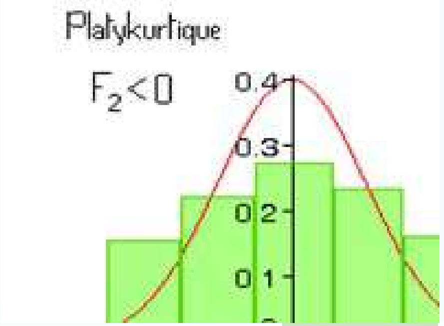
✓ **leptokurtique**, si cette distribution est moins plate que la distribution normale ;

✓ **platykurtique,** si cette distribution est plus plate que la distribution normale.

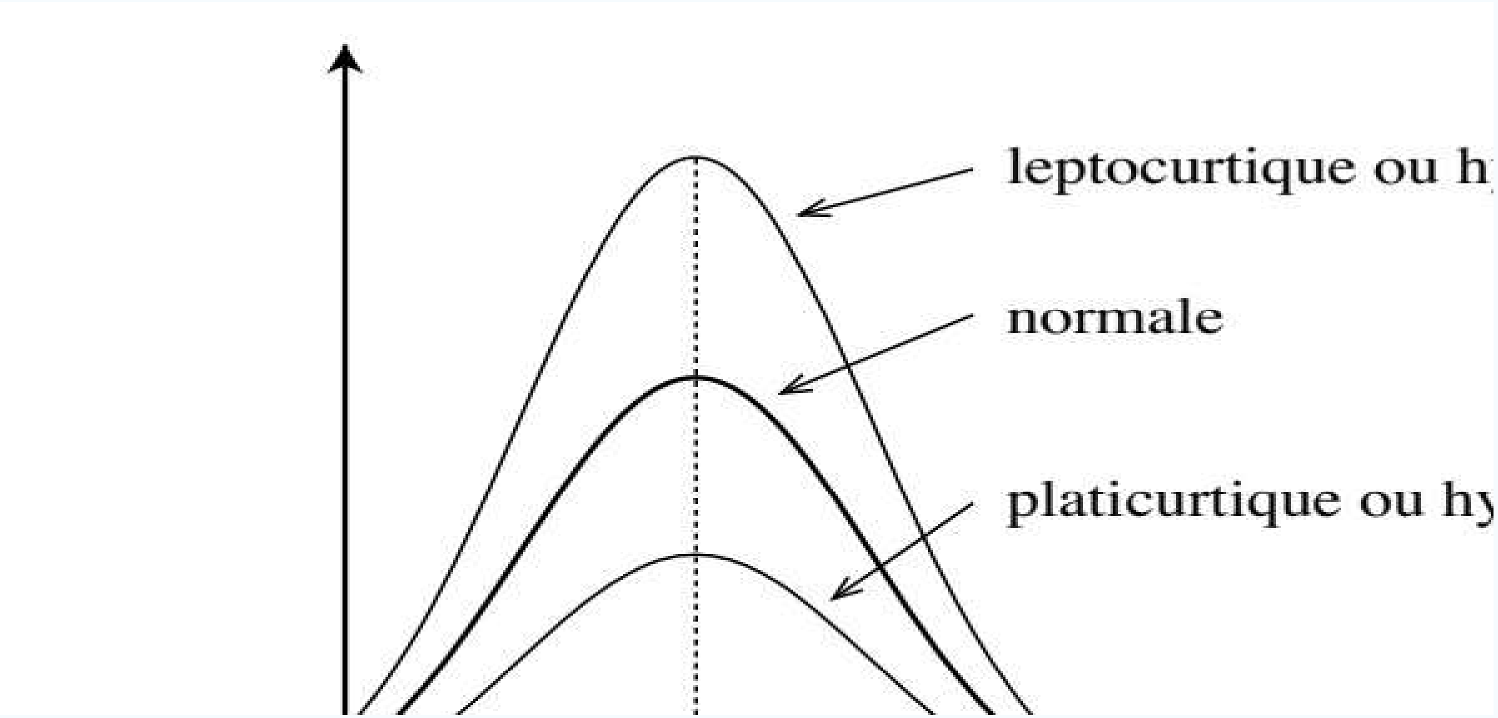
- **mésos (« moyen »), et de κυρτός (« courbé »)**
- **leptós (« mince »), et de κυρτός (« courbé »)**
- **platús (« plat »), et de κυρτός (« courbé »)**







Mesure de l'aplatissement:



Mesure de l'aplatissement: Coefficient d'aplatissement

- Le coefficient d'aplatissement de Pearson:

$$\beta = \frac{m_4}{\sigma^4}$$

- Le coefficient d'aplatissement de Yule:

$$F_2 = \beta - 3 = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3$$

- Si ***β* = 3** (équivaut à ***F2* = *0***) alors la distribution est ***mésokurtique*** =Normale
- Si ***β* > 3** (équivaut à ***F2* > *0***) alors la distribution est ***leptokurtique*** = moins plate que la loi Normale
- Si ***β* < 3** (équivaut à ***F2<0*** alors la distribution est ***platykurtique*** = plus plate que la loi Normale.

Avec

$m_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4$ sont les moments centrés d'ordre 4.

$\sigma = \sqrt{V}$ est l'écart-type de la série.

Statistique Descriptive

Mesure de l'aplatissement: Coefficient d'aplatissement

Exemple:

- On désire étudier l'aplatissement de la distribution du chiffres d'affaires journalier de 75 épiciers:
- Calculons le coefficient β de Person sur le relevé des données suivantes:

Chiffre d'affaire (en €)	effectifs
[215 235[	4
[235 255[	6
[255 275[	13
[275 295[	22
[295 315[	15
[315 335[	6
[335 355[	5
[355 375[	4

On a:

N=75

$$\beta = \frac{m_4}{\sigma^4}$$

$$m_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{8} n_i(c_i - \bar{x})^4$$

Mesure de l'aplatissement: Coefficient d'aplatissement

Exemple:

X_i (centre)	effectifs ni	$x_i - \bar{x}$	$n_i(x_i - \bar{x})^4$
225	4	-65,6	74 075 629,16
245	6	-45,6	25 942 428,06
265	13	-25,6	5 583 457,48
285	22	-5,6	21 635,89
305	15	14,4	644 972,54
325	6	34,4	8 402 045,34
345	5	54,4	43 789 058,05

- σ **=33,88 €**
- m_4=(281 020 067,84)/75

le coefficient de Pearson est égal à:

$$\beta = \frac{m_4}{\sigma^4}$$

$$\beta = \frac{\frac{1}{75} * 281\,020\,067}{(33{,}88)^4} = 2{,}84$$

β < 3 :la distribution du chiffres d'affaires journalier dans 75 épiceries est platykurtique (c-à-d plus aplatie que la distribution de la loi normale)

Application 1:

Voici la distribution des tarifs horaires des électriciens d'une association X

Tarif horaire	Nombre de membres
[20 ; 23[	66
[23 ; 26[	244
[26 ; 29[	321
[29 ; 32[	506
[32 ; 35[	113
[35 ; 38[	46
[38 ; 41[	13

étudier l'aplatissement de la distribution

Statistique Descriptive

Application 2:

Voici la distribution du nombre d'élèves par classe pour l'ensemble des gymnases

Nombre d'élèves par classe	Nombre de classe
16	8
17	17
18	33
19	128
20	206
21	173
22	85
23	72
24	51
25	14

Calculer

- les coefficients de forme.
- Interpréter.

Application 3:

- On dispose de 3 séries statistiques qui représentent le temps passé par des élèves du Bac scientifique à compléter un examen de mathématique. 40 élèves ont été sélectionnés dans trois écoles pour réaliser ces tests. Le temps est mesuré en minutes.
- Pour chaque école, calculer et interpréter le coefficient d’asymétrie et d’aplatissement pour des données quantitatives

Maths	School
43.78	A
43.83	A
44.11	A
45.21	A
45.56	A
46.64	A
46.85	A
47.02	A
47.04	A
47.24	A
48.23	A
48.31	A
48.47	A
48.50	A
48.51	A
48.91	A
48.96	A
49.20	A
49.23	A
49.23	A
49.51	A
49.55	A
49.66	A
50.16	A
50.27	A
51.18	A
51.20	A
51.41	A
52.54	A
53.22	A
53.55	A
53.55	A
53.70	A
54.73	A
55.47	A
57.63	A
57.82	A
59.34	A
59.90	A
68.38	A

Maths	School
28.41	B
37.80	B
42.82	B
43.74	B
43.88	B
44.56	B
45.07	B
45.26	B
45.76	B
45.95	B
46.22	B
47.07	B
47.40	B
47.48	B
47.68	B
47.74	B
48.30	B
48.52	B
48.85	B
49.38	B
49.71	B
49.79	B
49.96	B
50.13	B
50.49	B
50.89	B
50.92	B
51.38	B
51.54	B
51.96	B
52.75	B
52.93	B
53.04	B
53.23	B
53.50	B
54.63	B
54.75	B
54.96	B
55.65	B
56.85	B

Maths	School
40.68	C
42.50	C
44.23	C
44.30	C
44.79	C
45.01	C
45.11	C
45.28	C
45.58	C
46.09	C
46.32	C
46.51	C
46.66	C
46.92	C
47.36	C
48.43	C
48.45	C
49.00	C
49.20	C
49.62	C
49.97	C
50.23	C
50.79	C
50.99	C
51.33	C
51.87	C
51.96	C
52.00	C
52.17	C
52.41	C
53.04	C
53.61	C
53.95	C
54.15	C
54.17	C
54.93	C
55.39	C
55.50	C
57.49	C
57.90	C

Pour chaque école, calculer et interpréter le coefficient d’asymétrie et d’aplatissement pour des données quantitatives