Applications

Application 1:

Soit la série statistique suivante, qui représente le Nombre d’enfants observés dans un échantillon de 55 familles dans un quartier

Nombre d’enfants	n_i
0	3
1	4
2	8
3	7
4	14
5	9
6	6
7	2
8	1
9	1
Total N	55

1) Préciser : Population-individu-Echantillon-caractère
2) Quelle est la nature du caractère ?
3) Calculer les effectifs cumulés croissants et décroissants.
4) Calculer les fréquences cumulées croissantes et décroissantes
5) Combien de familles dans l’échantillon ont « moins de » 3 enfants.
6) Combien de familles dans l’échantillon ont « plus de » 2 enfants.
7) Combien de familles dans l’échantillon ont « moins de » 4 enfants ou « au plus » 3 enfants
8) Combien de familles dans l’échantillon ont « plus de » 3 enfants ou « au moins » 4 enfants

Représentation graphique des séries statistiques

Variable quantitative discrète

On distingue les méthodes de représentation d'une variable statistique en fonction de la nature de cette variable (qualitative ou quantitative) :

Le graphique est un support visuel qui permet :

- ✓ **La synthèse** : visualiser d'un seul coup d'œil les principales caractéristiques (mais on perd une quantité d'informations)
- ✓ **La découverte** : met en évidence les tendances.
- ✓ **Le contrôle** : on aperçoit mieux les anomalies sur un graphique que dans un tableau.
- ✓ **La recherche des régularités** : régularité dans le mouvement, répétition du phénomène.

Pour les variables **quantitatives discrètes**, on utilise:

- ✓ le diagramme en bâton
- ✓ Le polygone de fréquences(ou effectifs)
- ✓ le diagramme à secteur
- ✓ La courbe cumulative

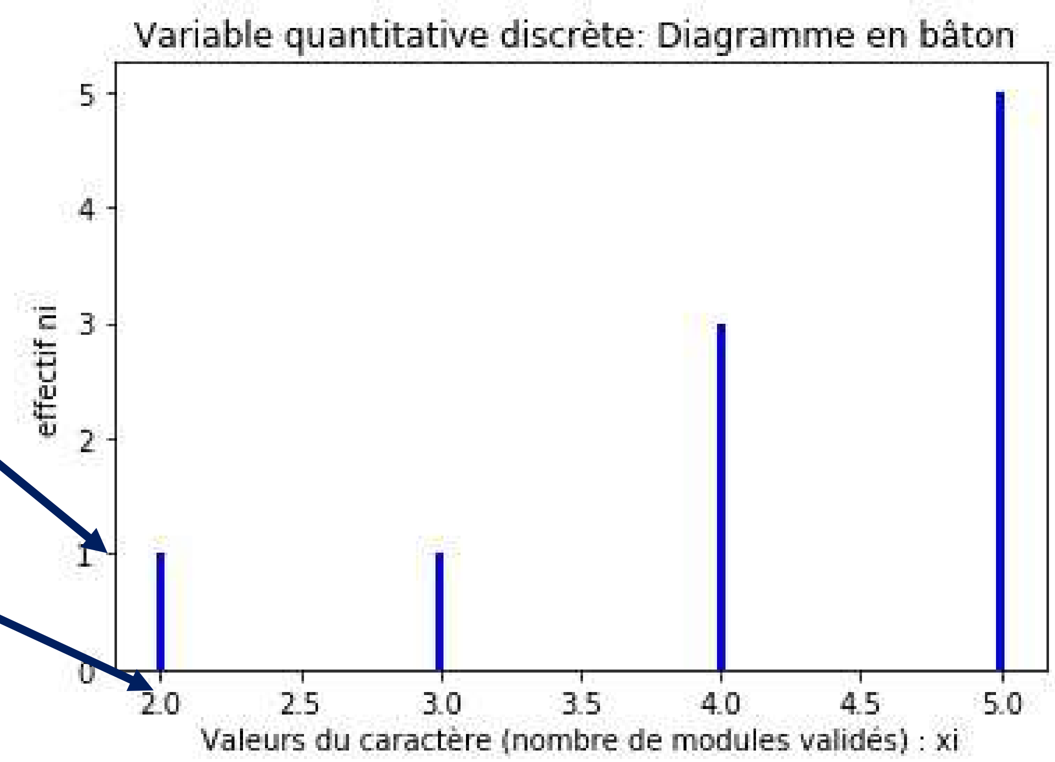
Chap 2: Les distributions, tableaux et graphiques statistiques.

Variable quantitative discrète

Diagramme en bâton des effectifs (ou à barres)

Dans un repère orthogonal, pour chaque valeur de la série statistique (X_i) on trace un trait vertical dont la hauteur est **proportionnelle** à l'effectif (n_i)

Valeurs du caractère (nombre de modules validés) : X_i	Effectif n_i
2	1
3	1
4	3
5	5



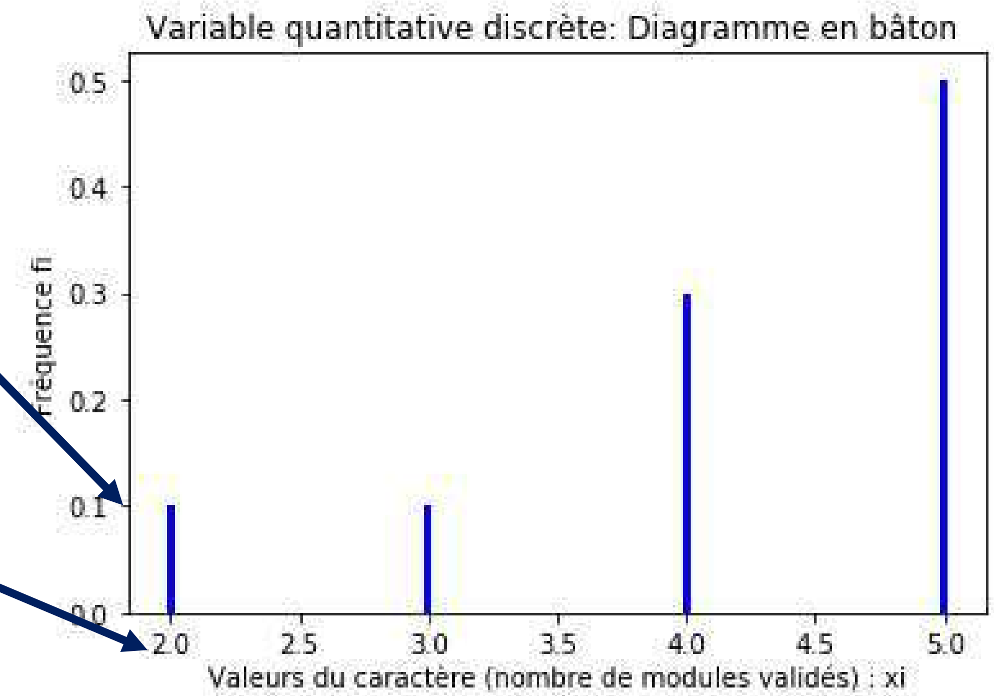
Chap 2: Les distributions, tableaux et graphiques statistiques.

Variable quantitative discrète

Diagramme en bâton de fréquences (ou à barres)

Dans un repère orthogonal, pour chaque valeur de la série statistique (X_i) on trace un trait vertical dont la hauteur est **proportionnelle** à la fréquence(f_i)

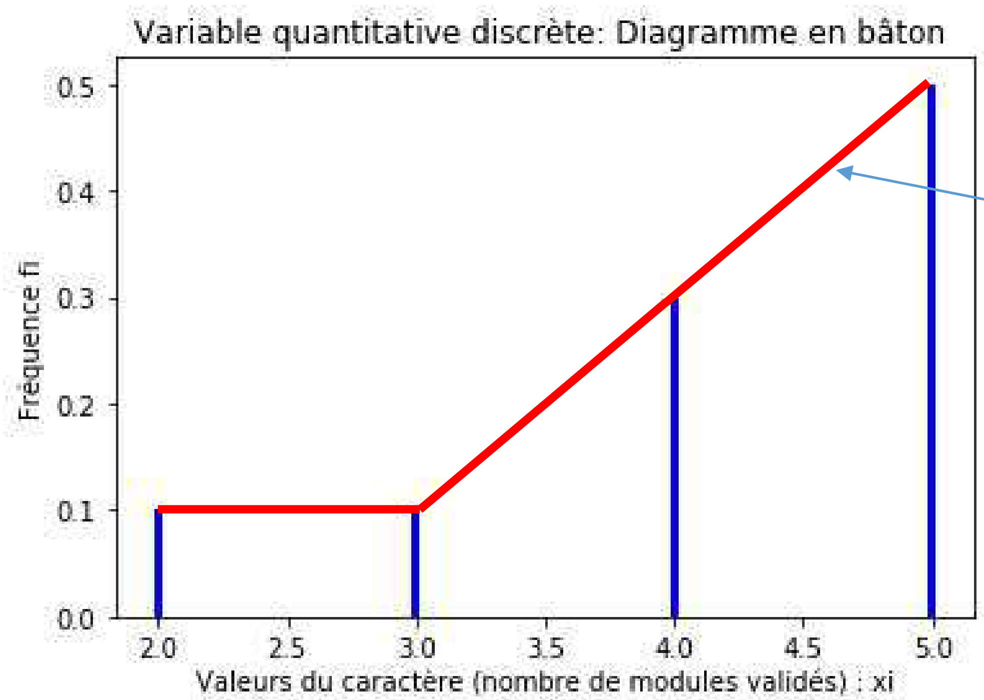
Valeurs du caractère (nombre de modules validés) : X_i	Effectif n_i	Fréquence f_i
2	1	0,1
3	1	0,1
4	3	0,3
5	5	0,5
Total :	10	1



Variable quantitative discrète

Polygone de fréquences (ou d'effectifs)

- En joignant les sommets des bâtons par une ligne brisée, on obtient **le polygone de fréquences**



le polygone de fréquences

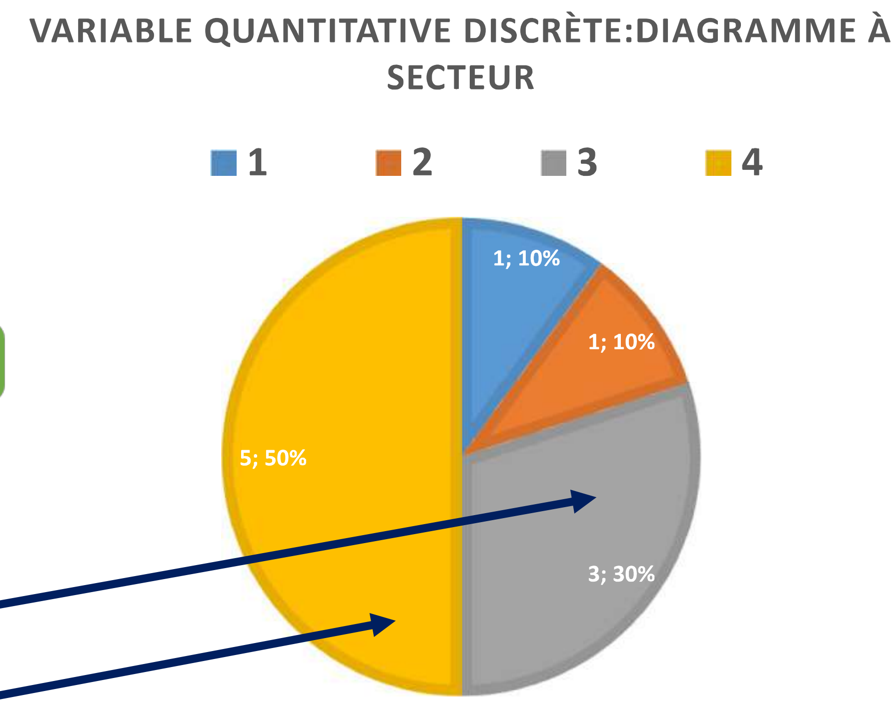
Chap 2: Les distributions, tableaux et graphiques statistiques.

Variable quantitative discrète

Diagramme à secteur (Camembert)

On appelle un diagramme à secteur un graphique qui divise un disque en secteurs angulaires dont les aires sont **proportionnels** au effectifs de chaque modalité.
Pour une modalité $\mathbf{X_i}$ d'effectif $\mathbf{n_i}$, l'angle $\boldsymbol{\alpha_i}$ correspondante est: $\alpha_i = fi \text{ x } 360$

Valeurs du caractère (nombre de modules validés) : X_i	Effectif n_i	Fréquence f_i
2	1	0,1
3	1	0,1
4	3	0,3
5	5	0,5
Total :	10	1



$$\alpha_3 = f_3 x360 = 0,3x360 = 108°$$
$$\alpha_4 = f_4 x360 = 0,5x360 = 180°$$

Chap 2: Les distributions, tableaux et graphiques statistiques.

Variable quantitative discrète

Diagramme cumulatif : Fonction de répartition

Considérons une population statistique décrite selon un caractère quantitatif **discret** *X* dont les *k* –modalités sont *x*1, · · · , *xi* , · · · , *xk* .

On dit que *F* (·) est la **fonction de répartition** associée à *X,* la fonction définie de R vers [0, 1] par:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < x_1, \\ F_i & \text{si} \quad x_i \leq x < x_{i+1}, \quad (\text{avec } i = 1, \ldots, k-1) \\ 1 & \text{si} \quad x \geq x_k, \end{cases}$$

La représentation graphique de la fonction de répartition (ou **fréquence cumulée**) est dite **diagramme cumulatif.**

Chap 2: Les distributions, tableaux et graphiques statistiques.

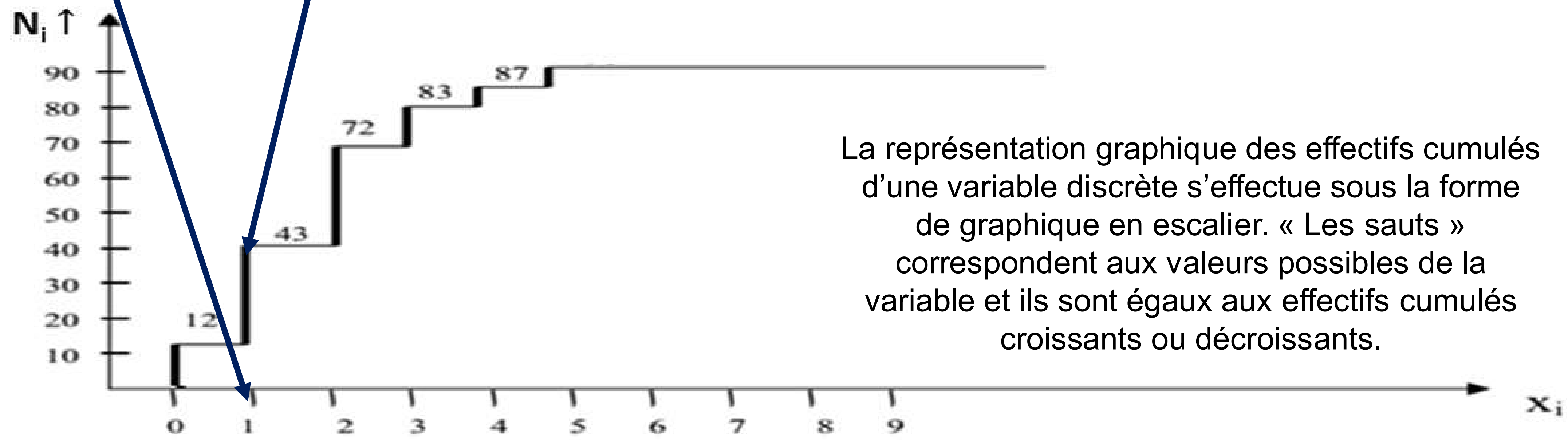
Variable quantitative discrète

Statistique Descriptive

courbe des effectifs cumulés croissants :

x_i	Effectif n_i	Effectif cumulé croissant N_i	Effectif cumulé décroissant Ni	Fréquence f_i	Fréquence en % f_ix100	Fréquence cumulée croissante F_i	Fréquence cumulée décroissante Fi
0	12	12	89	0,13	13,48	0,13	1,00
1	31	43	77	0,35	34,83	0,48	0,87
2	29	72	46	0,33	32,58	0,81	0,52
3	11	83	17	0,12	12,36	0,93	0,19
4	4	87	6	0,04	4,49	0,98	0,07
5	2	89	2	0,02	2,25	1,00	0,02
Total :	89			1,00	100,00		

Interprétation :
43 salariés (ou 48%) des salariés ont un enfant ou moins.



La représentation graphique des effectifs cumulés d'une variable discrète s'effectue sous la forme de graphique en escalier. « Les sauts » correspondent aux valeurs possibles de la variable et ils sont égaux aux effectifs cumulés croissants ou décroissants.

Chap 2: Les distributions, tableaux et graphiques statistiques.

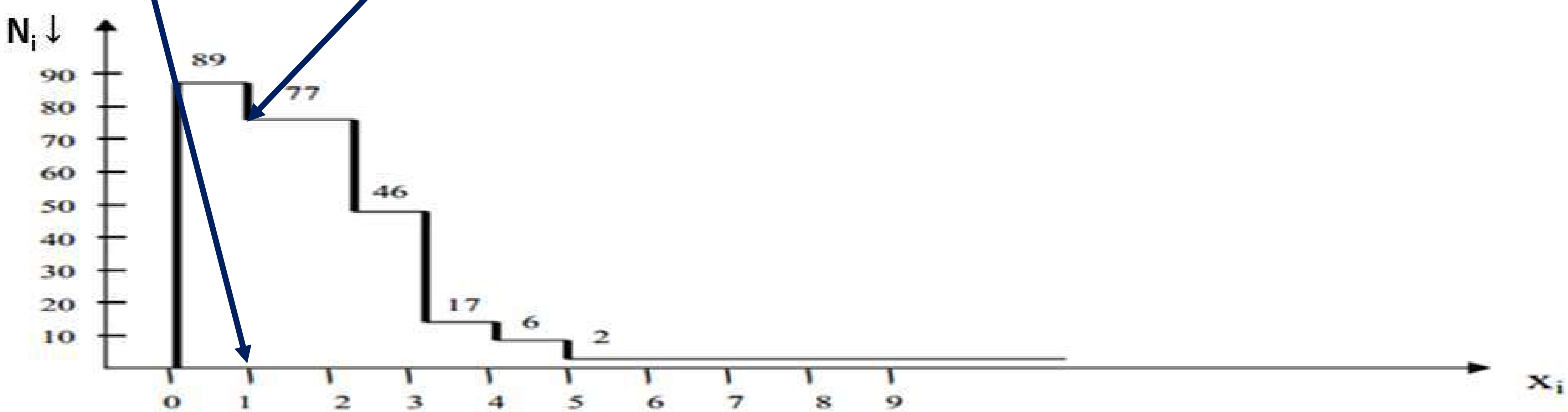
Statistique Descriptive

Variable quantitative discrète

courbe des effectifs cumulés décroissants :

x_i	Effectif n_i	Effectif cumulé croissant N_i	Effectif cumulé décroissant Ni	Fréquence f_i	Fréquence en % f_ix100	Fréquence cumulée croissante F_i	Fréquence cumulée décroissante Fi
0	12	1	89	0,13	13,48	0,13	1,00
1	31	4	77	0,35	34,83	0,48	0,87
2	29	7	46	0,33	32,58	0,81	0,52
3	11	8	17	0,12	12,36	0,93	0,19
4	4	8	6	0,04	4,49	0,98	0,07
5	2	8	2	0,02	2,25	1,00	0,02
Total :	89			1,00	100,00		

Interprétation :
77 salariés (ou 87 %) des salariés ont un enfant ou plus.



Applications

Application 2: A faire

x_i	Effectif n_i	Effectif cumulé croissant N_i	Effectif cumulé décroissant Ni	Fréquence f_i	Fréquence en % f_ix100	Fréquence cumulée croissante F_i	Fréquence cumulée décroissante Fi
0	12	12	89	0,13	13,48	0,13	1,00
1	31	43	77	0,35	34,83	0,48	0,87
2	29	72	46	0,33	32,58	0,81	0,52
3	11	83	17	0,12	12,36	0,93	0,19
4	4	87	6	0,04	4,49	0,98	0,07
5	2	89	2	0,02	2,25	1,00	0,02
Total :	89			1,00	100,00		

1. *Tracer la* courbe des fréquences cumulées croissantes
2. *Tracer la* courbe des fréquences cumulées décroissantes

Applications

Application 3: A faire

Pour déterminer le type de logement à construire, on a étudie 20 familles selon leur nombre d'enfants. Durant l'expérience, on a noté les résultats bruts suivants :

1,3,5,5,3,2,4,4,7,0,2,4,3,7,0,5,4,2,3,2

1. *Déterminer: la population, l'unité (individu), la variable statistique et les modalités.*
2. *Etablir le tableau statistique avec xi, ni, fi, Ni↑ , Ni ↓, Fi ↑, Fi↓*
3. *Donner toutes les représentations graphiques possibles de cette distribution.*

Variable quantitative continue:

- Elle peut prendre un nombre ***infini*** de valeurs dans son **intervalle** de définition
  Exemples: taille, revenus, CA, poids, salaire, surface, âge, etc
- Les variables continues peuvent être regroupées en ***classe.***
- **Classe:** Intervalle des valeurs possibles pour une variable quantitative continue

Exemple :

un individu qui pèse 76,5 Kg sera repéré dans une classe de poids de **[76-77]**

Variable quantitative continue

Classe:

Exemple: Une enquête réalisée auprès de ***295*** employés d'une entreprise Y sur le salaire mensuel en DH.

On peut choisir de regrouper les différentes valeurs (modalités) de la variable « salaire» en ***classes***

Salaires	Effectifs
[6000 – 7000[	10
[7000 – 9000[	50
[9000 – 10 000[	200
[10 000 – 13 000[	20
[13 000 – 17 000[	10
[17 000 – 30 000[	5
Total	***295***

Chap 2: Les distributions, tableaux et graphiques statistiques.

Variable quantitative continue

Classe:

- Lorsque les données sont regroupées en classe, il faut définir les **extrémités de la classe:**

  - ✓ Il faut préciser la « *borne inférieure* » et la « *borne supérieure* » de la classe
  - ✓ Il faut préciser sans ambiguïté si *les valeurs des extrémités* sont *inclues* ou *non* dans la classe.
  - ✓ Tous les éléments de la population étudiée (employés) doivent se retrouver dans ***une*** et ***une seule classe***

Exemple :

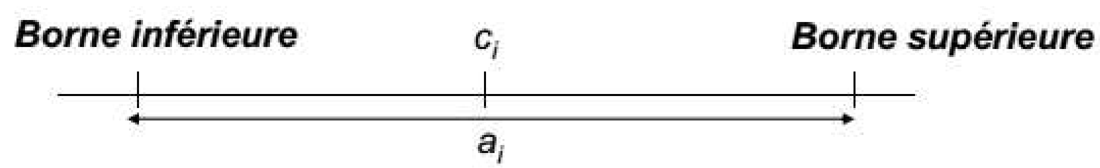
- **De 6000 à moins de 7000 DH:** [6000 – 7000[

  Cette classe comprendra un employé dont le salaire = 6999 tandis qu'un salarié dont le revenu = 7000 s'en trouvera exclu
- **De 7000 à moins de 9000 DH:** [7000 – 9000[
- **De 9000 à moins de 12 000 DH:** [9000 – 12 000[

- Pour des raisons pratiques, on retient généralement comme extrémités de classes des valeurs entières arrondies
- Effectuer aisément des calculs sur les extrémités de classes comme pour le calcul de ***l'amplitude des classes*** et du ***centre des classes***

Variable quantitative continue

Amplitude:



- Chaque classe possède une certaine **amplitude,** qui est **la longueur de l'intervalle** définissant la classe.
- ***L'amplitude de classe*** = la différence entre la valeur de l'extrémité supérieure et la valeur de l'extrémité inférieure.
- L'amplitude ***a*** d'une classe *i* sera donnée par la formule suivante : $a_i = b_i^{sup} - b_i^{inf}$

<u>Exemple:</u>

- L'amplitude a_i de la classe [6000 – 7000[est a_i = 7000 - 6000 = **1000**

Variable quantitative continue

Amplitude:

Exemple:

- Nombre d'enfants par femme

Nombre d'enfants	Effectifs	Amplitudes a_i
[0 – 2 [	4	2
[2 – 4 [	10	2
[4 – 6 [	6	2

← *Les classes sont d'amplitudes égales*

- Salaires des employés de l'entreprise « X » en DH

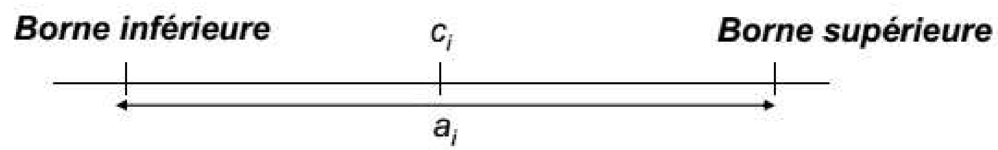
Salaires	Amplitudes a_i
[6000 – 7000[	1000
[7000 – 9000[	2000
[9000 – 12 000[	3000

← *Les classes sont d'amplitudes inégales*

Chap 2: Les distributions, tableaux et graphiques statistiques.

Variable quantitative continue

Le centre de classe :



- *Le centre de la classe* = la moyenne des extrémités de la classe
- Le centre *c* d'une classe *i* sera donné par la formule suivante :

$$C_i = \frac{b_i^{inf} + bi^{sup}}{2}$$

Exemple 1 : Cas où les amplitudes sont égales (Nombre d'enfants par femme)

Nombre d'enfants	Amplitudes	Centres c_i
[0 – 2 [	2	1
[2 – 4 [	2	3
[4 – 6 [	2	5

Exemple 2 : Cas de classes d'amplitudes inégales (Salaires des employés de l'entreprise « X » en DH)

Salaires	Amplitudes	Centres c_i
[6000 – 7000[	1000	6500
[7000 – 9000[	2000	8000
[9000 – 12 000[	3000	10 500

Applications

Variable quantitative continue

Application 4:

Répartition des Salaires des employés de l'entreprise « Y » en DH

Salaires	Effectifs	Amplitudes	Centres c_i
[6000 – 7000[	10		
[7000 – 9000[	50		
[9000 – 10 000[	200		
[10 000 – 13 000[	20		
[13 000 – 17 000[	10		
[17 000 – 30 000[	5		
Total	***295***	-	-

Variable quantitative continue

Statistique Descriptive

la densité d'effectif/la densité de fréquence (h_i):

- Le rapport entre l'effectif d'une classe et son amplitude s'appelle la **densité d'effectif.**

$$h_i = \frac{n_i}{a_i}$$

- Le rapport entre la fréquence d'une classe et son amplitude s'appelle la **densité de la fréquence (h_i).**

$$h_i = \frac{f_i}{a_i}$$

la densité d'effectif/la densité de fréquence (h_i):

Exemple :

On donne la distribution suivante concernant les notes de 100 étudiants dans une matière donnée.

Notes	[0,6[	[6,10[	[10,14[	[14,16[	[16,20]
nombre des étudiants	10	30	45	10	5

- La variable quantitative étudiée est « la note obtenue par un étudiant dans une matière donnée »
- Pour une variable continue, les effectifs sont associés non à une valeur mais à un intervalle.

Variable quantitative continue

la densité d'effectif/la densité de fréquence (h_i):

Exemple :

Notes	[0,6[	[6,10[	[10,14[	[14,16[	[16,20]
nombre des étudiants	10	30	45	10	5

Notes	Nombre des étudiants (ni)	Fréquence (fi)	Fréquence (fi) en %	Fréquence cumulée (Fi)	Fréquence cumulée (Fi) en %	Amplutude (ai)	Densité de fréquence (hi)
[0,6 [	10	0,1	10	0,1	10	6	0,016666667
[6,10 [	30	0,3	30	0,4	40	4	0,075
[10,14[	45	0,45	45	0,85	85	4	0,1125
[14,16[	10	0,1	10	0,95	95	2	0,05
[16,20]	5	0,05	5	1	100	4	0,0125

$a_3=14-10=4$

$f_3=\frac{n_3}{N}=\frac{45}{100}=0,45$

$h_3=\frac{f_3}{a_3}=\frac{0,45}{4}=0,1125$

Variable quantitative continue

Représentation graphique des séries statistiques

Pour les variables **quantitatives continues**, on utilise:

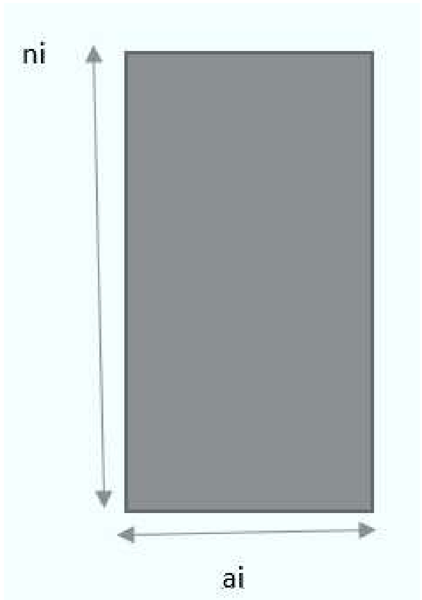
- ✓ L'histogramme de fréquence ou d'effectif
- ✓ Le polygone des effectifs (fréquences)
- ✓ La courbe des fréquences cumulées croissantes ou décroissantes

Statistique Descriptive

L'histogramme de fréquence ou d'effectif

Variable quantitative continue

- Pour chaque classe, on élève un rectangle ayant une base proportionnelle à l'intervalle de la classe (amplitude), et de hauteur proportionnelle à l'effectif.
- Dans ce cas, ce sont **les surfaces** et non les hauteurs qui sont proportionnelles à l'effectif.



- Dans la pratique deux cas peuvent se présenter :

  ✓ **Cas d'amplitude égale**
  ✓ **Cas d'amplitude inégale**

Chap 2: Les distributions, tableaux et graphiques statistiques.

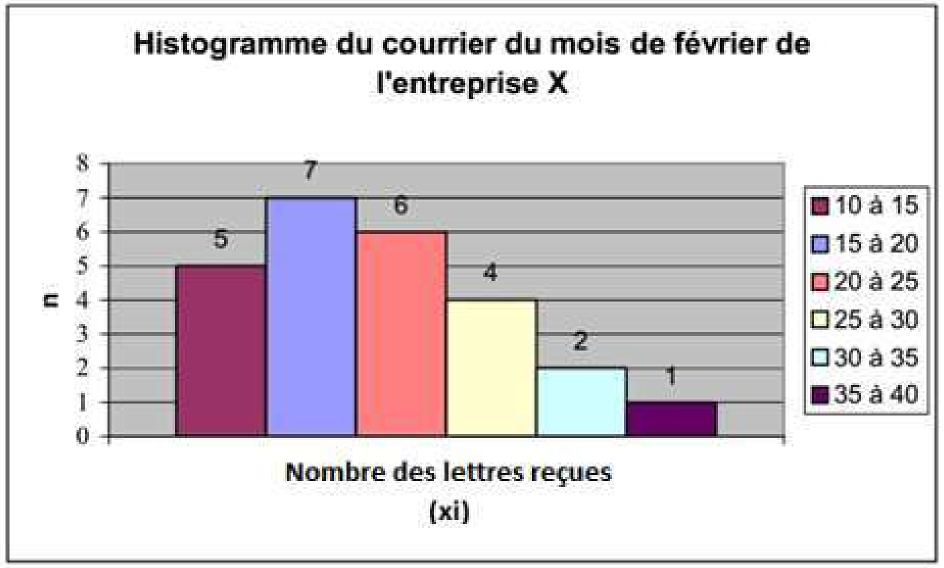
Variable quantitative continue

L'histogramme de fréquence ou d'effectif

Exemple: **Cas d'amplitude égale**

Distribution du courrier du mois de février d'une entreprise en fonction du nombre des lettres reçues.

Nombre des lettres reçues (xi)	Fréquences absolues (ni)	Amplitudes
10 à 15	5	5
15 à 20	7	5
20 à 25	6	5
25 à 30	4	5
30 à 35	2	5
35 à 40	1	5



Rq:

- Pour x_5 la surface du rectangle associé est :$s_5=5x2=10$
- Pour x_4 la surface du rectangle associé est :$s_4=5x4=20$

Si $n_4=2 \times n_5$ alors $s_4=2 \times s_5$

Statistique Descriptive

L'histogramme de fréquence ou d'effectif

Exemple: **Cas d'amplitude inégale :**

Supposant que la distribution précédente, sur une période de deux mois, se présente de la façon suivante :

Nombre des lettres reçues (xi)	Fréquences absolues (n_i)	Amplitude
10 à 15	3	5
15 à 20	9	5
20 à 25	12	5
25 à 35	18	10
35 à 40	6	5
40 à 45	3	5
	Total : 51	

- Pour x_5 la surface du rectangle associé est : $s_5=6x5=30$
- Pour x_4 la surface du rectangle associé est $s_4=18x10=180$
- Si $n_4=3 \times n_5$ alors $s_4=3 \times s_5$

180 ≠ 30 x 3

☹

Effectif corrigé

Variable quantitative continue

Statistique Descriptive

L'histogramme de fréquence ou d'effectif

Effectif corrigé:

Dans ce cas, on respecte la proportionnalité des surfaces, il faut rectifier en conséquence les hauteurs.

$$n_i' = \frac{n_i}{a_i} \times a_0 = h_i \times a_0$$

Nombre des lettres reçues (xi)	Effectif (ni)	Amplitudes	Effectif corrigé (ni')
10 à 15	3	5	3
15 à 20	9	5	9
20 à 25	12	5	12
25 à 35	18	10	9
35 à 40	6	5	6
40 à 45	3	5	3

$$n_4' = \frac{n_4}{a_4} \times a_0 = \frac{18}{10} \times 5 = 9$$

Variable quantitative continue

Statistique Descriptive

L'histogramme de fréquence ou d'effectif

Effectif corrigé:

Nombre des lettres reçues (xi)	Effectif (ni)	Amplitudes	Effectif corrigé (ni')
10 à 15	3	5	3
15 à 20	9	5	9
20 à 25	12	5	12
25 à 35	18	10	9
35 à 40	6	5	6
40 à 45	3	5	3

En utilisant l'effectif corrigé ni':

- Pour x_5 la surface du rectangle associé est : $s_5 = \mathbf{n_5' \times a_5} = 6 \times 5 = 30$
- Pour x_4 la surface du rectangle associé est $s_4 = \mathbf{n_4' \times a_4} = 9 \times 10 = 90$
- Si $n_4 = 3 \times n_5$ alors $\mathbf{s_4 = 3 \times s_5}$

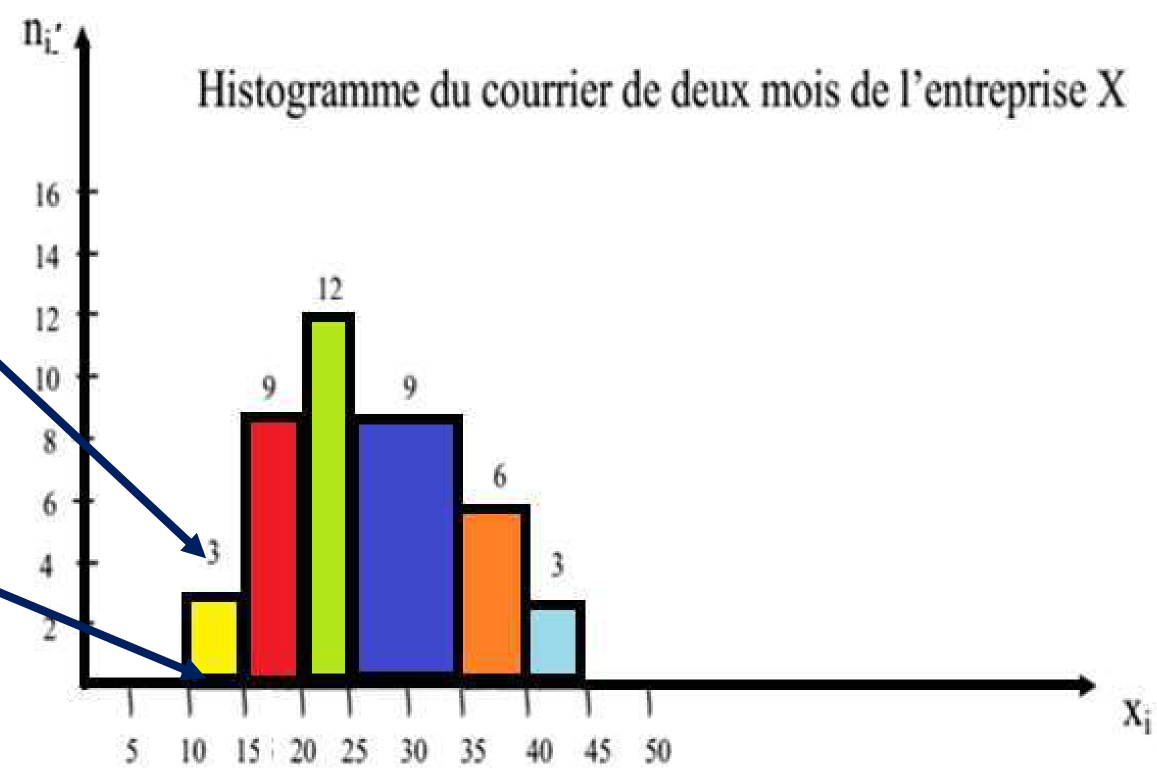
90 =30 x 3

Avec les effectifs corrigés, on respecte la proportionnalité des surfaces

L'histogramme de fréquence ou d'effectif

Exemple: **Cas d'amplitude inégale :**

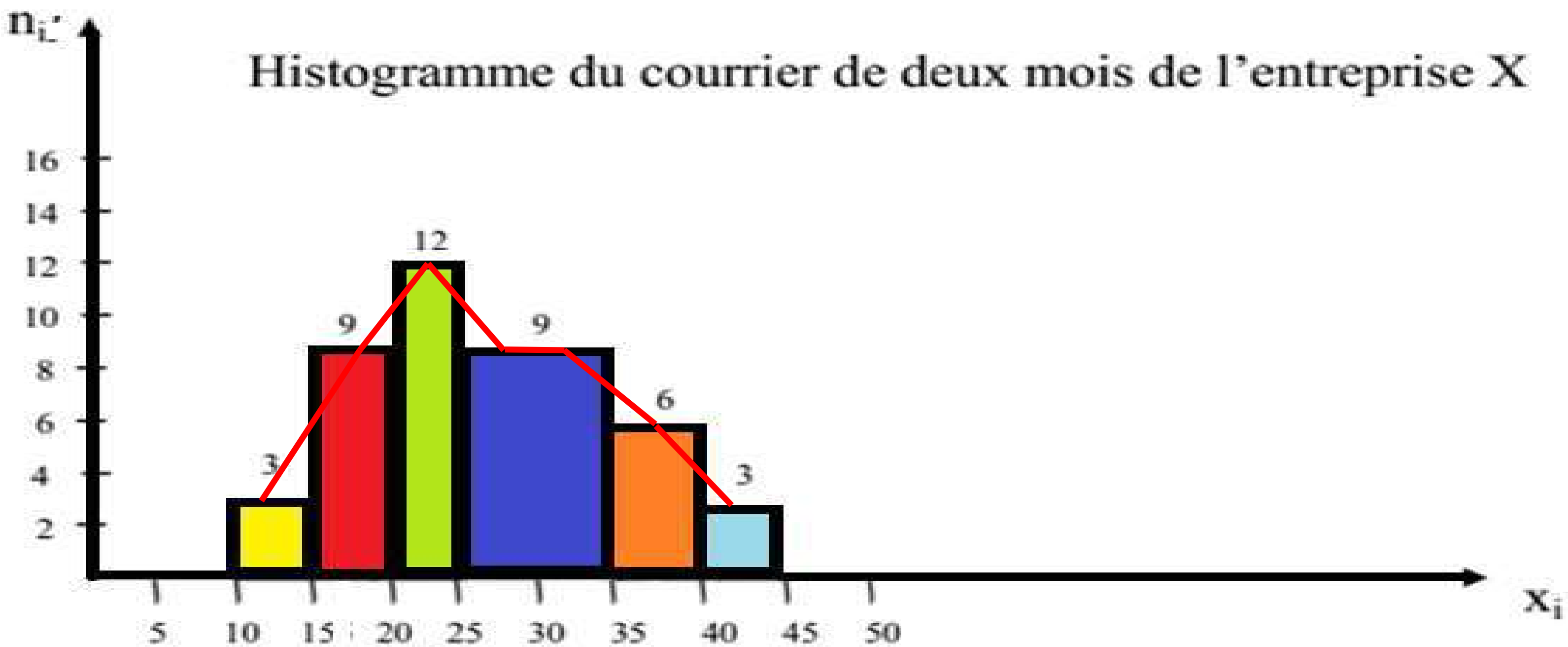
Nombre des lettres reçues (xi)	Effectif (ni)	Amplitudes	Effectif corrigé (ni')
10 à 15	3	5	3
15 à 20	9	5	9
20 à 25	12	5	12
25 à 35	18	10	9
35 à 40	6	5	6
40 à 45	3	5	3



Variable quantitative continue

Le polygone des effectifs:

Le polygone des effectifs obtenues en joignant par des segments de droites au milieu des bases supérieurs des rectangles permet de rendre compte de la continuité de la variable.



Applications

Application 5:

Le directeur des ressources humaines (DRH) d'une entreprise a relevé la distribution statistique de l'ancienneté des cadres de son entreprise, exprimée en années :

Classes	[6,5 ; 8[	[8 ; 9,5[	[9,5 ; 11[	[11 ; 12,5[	[12,5 ; 14[	[14 ; 15,5[	[15,5 ; 17[	Total
Effectifs	3	8	12	19	9	5	4	60

- Représenter par un histogramme et par un polygone les effectifs de la série statistique

Applications

Application 6:

Le directeur des ressources humaines (DRH) d'une entreprise a relevé la distribution statistique de l'ancienneté des cadres de son entreprise, exprimée en années :

Classes	[6,5;9,5[	[9,5;11[	[11;12,5[	[12,5;14[	[14;17[
Effectifs	11	12	19	9	9

- Représenter par un histogramme et par un polygone les effectifs de la série statistique