Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

1. LE MODE
2. LA MÉDIANE
3. LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE
4. GÉNÉRALISATION DE LA MOYENNE

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

- Les caractéristiques de tendance centrale ont pour but de résumer les données statistiques du point de vue de l'ordre de grandeur (le niveau des variables).
- Il est possible de construire plusieurs de ces caractéristiques.
- Les plus importantes sont le mode, la médiane, la moyenne arithmétique et les autres moyennes.

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

1. Le mode

Définition. Le mode, noté M_o, se calcule pour tous les caractères. Il correspond à la modalité dont l'effectif dépasse simultanément les effectifs de la modalité qui la précède et de celle qui la suit. Le mode peut ne pas exister, et lorsqu'il existe n'est pas forcément unique.

Détermination. Dans le cas d'une série ou d'une distribution simple (variable discrète). La détermination du mode est immédiate et sans ambigüité. Voici quelques exemples :

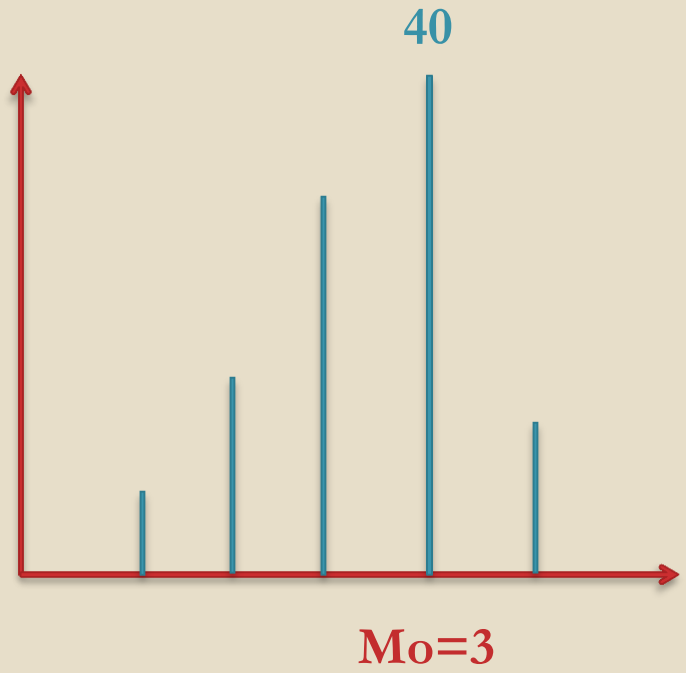
- Pour la série 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 le mode n'existe pas
- Pour la série 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 10 ; 12 $M_o = 10$
- Pour la série 3 ; 5 ; 5 ; 5 ; 7 ; 9 ; 9 ; 9 ; 11 $M_o = 5$ et $M_o = 9$
- Pour la série 4 ; 6 ; 6 ; 6 ; 8 ; 10 ; 10 ; 12 M_o =6 mode global et M_o=10 mode local

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

1. Le mode

Soit la distribution du nombre d'enfants par ménage suivante :

Nombre d'enfants x_i	Nombre de ménages n_i
0	5
1	15
2	30
3	40
4 et plus	10
Total	100



D'après notre définition, le nombre d'enfants par ménage modal est Mo=3.

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

1. Le mode

Dans le cas d'une variable continue (données groupées). Le mode se détermine en deux étapes :

1. On détermine d'abord une classe modale C_{Mo} de la même manière que le mode dans le cas d'une variable discrète.
2. Ensuite, on calcule le mode au sein de la classe modale par interpolation linéaire.

La méthode de l'interpolation (méthode des diagonales) rend la formule suivante :

$$M_o = b_{i-1} + a_i \left[\frac{d_i - d_{i-1}}{(d_i - d_{i-1}) + (d_i - d_{i+1}} \right]$$

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

1. Le mode

Exemple. Le chiffre d'affaires de 100 commerces (en milliers de DH) dans un quartier de la ville de Tanger est distribué de la manière suivante :

Chiffre d'affaires	Effectif
[0, 100[	15
[100, 300[	40
[300, 400[	30
[400, 900[	15
Total	100

Comme les classes ne présentent pas les mêmes amplitudes il faut prendre en considération les effectifs corrigés (les densités). Les calculs sont effectués dans le tableau suivant :

	Effectif	a_i	d_i
[0, 100[	15	100	15
[100, 300[	40	200	20
[300, 400[	30	100	30
[400, 900[	15	500	3
Total	100	100	100

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

1. Le mode

Etape 1. La classe modale qui correspond à l'effectif le plus élevé (30) est la classe [300, 400[: le chiffre d'affaire le plus fréquemment réalisé est compris entre 300 000 DH et 400 000 DH.

Etape 2. Une approximation du chiffre d'affaire modal est donnée par la méthode des diagonales. Soit :

$$\boldsymbol{M_o = 300 + 100 \times \left[\frac{30-20}{(30-20)+(30-3)}\right] = 327,027 \equiv 327\ 027}\text{DH}$$

Ainsi, le chiffre d'affaires le plus fréquemment réalisé est approximativement de 327 027DH.

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

2. La médiane

Définition. Lorsque les données peuvent êtres ordonnées sans ambiguïté (c'est le cas des variables quantitatives ou qualitatives ordinales), on peut déterminer une caractéristique de tendance centrale appelée médiane, notée Mé : c'est la valeur de la modalité qui partage les observations en deux parties égales.

Détermination. :

Cas d'une série ou d'une distribution discrète de taille n :

Deux cas peuvent se présenter :

1. n est impair, c'est-à-dire n=2k+1 alors la médiane correspond à la (k+1)ème observation de la série ordonnée
2. n est pair c'est-à-dire n=2k on obtient un intervalle médian et la médiane est donnée par la $\frac{2k+1}{2}$ ème observation de la série ordonnée

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

2. La médiane

Exemple : Considérons la distribution fictive suivante qui donne le nombre d'enfants par ménage

x_i	n_i	f_i	N_i^+	F_i^+
0	10	0,036	10	0,036
1	20	0,071	30	0,107
2	30	0,107	60	0,214
3	50	0,179	110	0,393
4	70	0,250	180	0,643
5	40	0,143	220	0,786
6	30	0,107	250	0,893
7	20	0,071	270	0,964
8 et plus	10	0,036	280	1,000
Total	$n = 280$	1	----	----

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

2. La médiane

Le nombre d'observations est pair (280), la médiane est la valeur de x_i qui correspond à la $\frac{2k+1}{2}$ème observation. Comme $k = \frac{n}{2} = 140$, la médiane correspond à la 140,5ème observation. Elle est donnée par $x_i = 4$. En effet, le premier 4 est situé à la 111ème position et le dernier à la 180ème position. Ainsi, 110 couples (39,3%) ont moins de 4 enfants et 170 (60,7%) couples ont 4 enfants et plus. En fait, dans le cas discret, la médiane ne partage pas toujours l'effectif total en deux parties exactement égal.

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

2. La médiane

Cas d'une variable continue :

Dans ce cas, il est toujours possible de trouver une valeur qui partage le nombre d'observations en deux parties exactement égales. Comme pour le mode, la médiane se détermine en deux étapes :

1. On détermine la classe médiane ; de la même manière que la médiane dans le cas discret
2. On calcule la médiane par interpolation en utilisant l'histogramme ou la courbe cumulative. On peut, ce qui est équivalent utiliser une des deux formules suivantes :

$$M\text{é} = b_{i-1} + a_{i-1}\left(\frac{\frac{n}{2} - N^{+}_{i-1}}{n_i}\right)$$

$$M\text{é} = b_{i-1} + a_{i-1}\left(\frac{\frac{1}{2} - F^{+}_{i-1}}{f_i}\right)$$

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

2. La médiane

Exemple. Considérons la distribution du chiffre d'affaires de 650 entreprises suivante :

x_i	n_i
[250, 260[	80
[260, 270[	100
[270, 280[	160
[280, 290[	140
[290, 300[	100
[300, 310[	50
[310, 320[	20
Total	n = 650

On souhaite calculer le chiffre d'affaires médian

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

2. La médiane

Réponse. On détermine d'abord les fonctions fréquences cumulées. Les calculs sont effectués dans le tableau suivant :

x_i	n_i	f_i	N_i^+	F_i^+
[250, 260[$= 650$	80	0,123	80	0,123
[260, 270[	100	0,154	180	0,227
[270, 280[	160	0,246	340	0,523
[280, 290[	140	0,215	480	0,738
[290, 300[	100	0,154	580	0,892
[300, 310[	50	0,077	630	0,969
[310, 320[	20	0,031	650	1
Total		1	----	----

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

2. La médiane

x_i	n_i	f_i	N_i^+	F_i^+
[250, 260[	80	0,123	80	0,123
[260, 270[	100	0,154	180	0,227
[270, 280[	160	0,246	340	0,523
[280, 290[	140	0,215	480	0,738
[290, 300[	100	0,154	580	0,892
[300, 310[	50	0,077	630	0,969
[310, 320[	20	0,031	650	1
Total		1	----	----

Etape 1. La classe médiane est donnée par la classe [270, 280[

Etape 2. La méthode de l'interpolation linéaire donne une approximation de la médiane

$$Mé=270+28012-0,2770,246=279,06$$

$$Mé=270+280325-180160=279,06$$

Ainsi, la moitié des entreprises réalisent un chiffre d'affaires approximatif de 279 060DH.

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

2. La médiane / Propriétés de la médiane

Points positifs : Elle est plus stable en termes de fluctuations d'échantillonnage que la moyenne arithmétique. Elle est préférée à la moyenne arithmétique en présence de valeurs extrêmes. Elle est préférée au mode dans le cas de caractères continus.

Points faibles : Elle ne prend pas en considération l'ensemble des observations. Généralement on lui préfère le mode ou la moyenne arithmétique lorsque le caractère est discret que la médiane est une valeur qui se répète un nombre importante de fois.

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

2. La médiane / Propriétés de la médiane

Les quantiles

Les quantiles sont une généralisation de la notion de médiane. En effet, si la médiane permet de diviser l'effectif en deux parties égales, les quantiles divisent l'effectif en plusieurs parties égales. Généralement ils divisent l'effectif en 4, 10, 100, etc. parties égales. Ils sont appelés alors quartiles, centiles, percentiles, etc.

Ils se calculent exactement de la même manière que la médiane.

Reprenons notre exemple relatif à la distribution du chiffre d'affaires et calculons les quartiles q_1, q_2 et q_2.

$$q_1 = 260 + 10\left(\frac{0{,}25 - 0{,}123}{0{,}154}\right) = 268{,}24$$

$$q_{12} = Médiane = 279{,}06$$

$$q_1 = 290 + 10\left(\frac{0{,}75 - 0{,}738}{0{,}154}\right) = 268{,}24$$

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

2. La médiane / Propriétés de la médiane

Les quantiles

Ainsi :

- 25% des entreprises réalisent un C.A. inférieur 268 240DH
- 25% entreprises réalisent un C.A. compris entre 268 240DH et 279 060DH
- 25% entreprises réalisent un C.A. compris entre 279 060DH et 290 780DH
- 25% entreprises réalisent un C.A. supérieur à 290 780DH.

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

3. La moyenne arithmétique

Définition. Pour pouvoir donner une définition intuitive de la moyenne arithmétique considérons un exemple simple. Une entreprise qui emploie 5 salariés et qui dépense, 60 000 dirhams mensuellement, en salaires. Le directeur se verse 15 000 dirhams, le comptable reçoit 7 500 dirhams et chacun des trois ouvriers 2 500 dirhams. Si le poste occupé n'avait pas d'importance, chaque employé recevrait le même salaire. Ce dernier serait de 6 000 dirhams par mois ; c'est le salaire moyen.

Définition. La moyenne arithmétique, notée $\bar{x}$, est le rapport entre la somme de toutes les observations (masse globale) et le nombre d'observations.

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

3. La moyenne arithmétique

Détermination

Dans le cas d'une série statistique $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la moyenne arithmétique est dite simple et elle est donnée par

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Dans le cas d'une distribution statistique (cas discret), la moyenne arithmétique est dite pondérée et s'écrit :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_k x_k}{n}$$

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

3. La moyenne arithmétique

Détermination

où k est, bien entendu, le nombre de modalités.

Une formule équivalente de $\bar{x}$ est

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_k x_k.$$

Enfin, dans le cas continu où les données sont groupées en classes *i*, la moyenne arithmétique $\bar{x}$, devient

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i c_i = \sum_{i=1}^{k} f_i c_i$$

où $c_i = \frac{(b_{i-1}+b_i)}{2}$ est le centre de la classe *i*.

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

3. La moyenne arithmétique

Exemple. A un examen, vingt étudiants ont obtenu les notes suivantes :

11, 4, 12, 5, 10, 15, 8, 10, 17, 5, 10, 10, 5, 10, 11, 8, 11, 12, 9, 14

La note moyenne – donnée par la moyenne arithmétique simple – est donnée par

$$\bar{x} = \frac{4+5+5+5+8+8+9+10+10+10+10+10+11+11+11+12+12+14+15+17}{20}$$

$$= \frac{197}{20} = 9{,}85$$

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

3. La moyenne arithmétique

Lorsqu'on examine attentivement la série, on constate que plusieurs notes se répètent. Il est alors intéressent de les regrouper dans un tableau.

Notes x_i	Effectifs n_i	Fréquences f_i	$n_i x_i$	$f_i x_i$
4	1	0,05	4	0,2
5	3	0,15	15	0,75
8	2	0,10	16	0,8
9	1	0,50	9	0,45
10	5	0,25	50	2,5
11	3	0,15	33	1,65
12	2	0,10	24	1,2
14	1	0,05	14	0,7
15	1	0,05	15	0,75
17	1	0,05	17	0,85
Total	$\sum_{i=1}^{10} n_i = 20$	$\sum_{i=1}^{10} f_i = 1$	$\sum_{i=1}^{10} n_i x_i = 197$	$\sum_{i=1}^{10} f_i x_i = 9{,}85$

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

3. La moyenne arithmétique

Lorsqu'on examine attentivement la série, on constate que plusieurs notes se répètent. Il est alors intéressent de les regrouper dans un tableau.

Notes x_i	Effectifs n_i	Fréquences f_i	$n_i x_i$	$f_i x_i$
4	1	0,05	4	0,2
5	3	0,15	15	0,75
8	2	0,10	16	0,8
9	1	0,50	9	0,45
10	5	0,25	50	2,5
11	3	0,15	33	1,65
12	2	0,10	24	1,2
14	1	0,05	14	0,7
15	1	0,05	15	0,75
17	1	0,05	17	0,85
Total	$\sum_{i=1}^{10} n_i = 20$	$\sum_{i=1}^{10} f_i = 1$	$\sum_{i=1}^{10} n_i\, x_i = 197$	$\sum_{i=1}^{10} f_i x_i = 9{,}85$

Comme on peut le constater, la dernière cellule du tableau donne directement la note moyenne.

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

3. La moyenne arithmétique

Admettons maintenant qu'on souhaite regrouper ces notes dans des classes d'amplitude 5, le résultat sera le suivant

Notes x_i	Centres c_i	Effectifs n_i	f_i	$n_i x_i$	$f_i x_i$
[0, 5[	2,5	1	0,05	2,5	0,05
[5, 10[	7,5	6	0,30	45	1,8
[10, 15[	12,5	11	0,55	137,5	6,05
[15, 20[	17,5	2	0,10	35	0,2
Total	-----	$\sum n_i = 20$	$\sum f_i = 1$	$\sum n_i x_i = 220$	$\sum f_i x_i = 8{,}10$

Là encore, la note moyenne est directement donnée par la dernière cellule du tableau. On remarque que le résultat obtenu est différent du cas précédent. En effet on peut penser que le regroupement effectué n'est pas judicieux ; plus de la moitié de l'effectif se retrouve dans une seule classe.

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

3. La moyenne arithmétique/ Propriétés

La moyenne arithmétique est la caractéristique de tendance centrale la plus utilisé en raison de ses propriétés

Se prête facilement aux manipulations algébriques

- $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$
- $\overline{ax} = a\overline{x}$
- $\overline{x+b} = \overline{x} + b$
- $\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x}) = 0$

- Très affectée par les fluctuations d'échantillonnage (plus que le mode et la médiane)
- On lui préfère le mode dans certains cas discrets (l'exemple typique est celui de la pointure de chaussures)
- On lui préfère la médiane dans le cas de valeurs extrêmes

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

3. La moyenne arithmétique/ Propriétés

$\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x}) = 0$: Cette propriété signifie que la moyenne arithmétique est la meilleure estimation de x.

- Considérons un échantillon E qu'on peut décomposer en n sous échantillons chacun de taille n_i. Soient $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$. les moyennes arithmétiques sur les n sous-échantillons. La moyenne arithmétique sur l'échantillon E est la moyenne arithmétique des n moyennes arithmétiques : $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i \overline{x}_i$

- La moyenne des carrés des différences de valeurs x a une constante x_0 est minimale $x_0 = \overline{x}$

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

3. La moyenne arithmétique/ Propriétés

$\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x}) = 0$: Cette propriété signifie que la moyenne arithmétique est la meilleure estimation de x.

- Considérons un échantillon E qu'on peut décomposer en n sous échantillons chacun de taille n_i. Soient $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$. les moyennes arithmétiques sur les n sous-échantillons. La moyenne arithmétique sur l'échantillon E est la moyenne arithmétique des n moyennes arithmétiques : $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i \overline{x}_i$

- La moyenne des carrés des différences de valeurs x a une constante x_0 est minimale $x_0 = \overline{x}$

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

3. La moyenne arithmétique/ Propriétés

$\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x}) = 0$: Cette propriété signifie que la moyenne arithmétique est la meilleure estimation de x.

- Considérons un échantillon E qu'on peut décomposer en n sous échantillons chacun de taille n_i. Soient $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$. les moyennes arithmétiques sur les n sous-échantillons. La moyenne arithmétique sur l'échantillon E est la moyenne arithmétique des n moyennes arithmétiques : $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i \overline{x}_i$

- La moyenne des carrés des différences de valeurs x a une constante x_0 est minimale $x_0 = \overline{x}$

Chapitre 2. Les caractéristiques de tendance centrale

4. Généralisation de la moyenne

La moyenne arithmétique n'est qu'un cas particulier d'un concept plus général appelé moyenne d'ordre *r*, noté $\bar{x}_r$, qui se définit comme la racine $r^{ième}$ de la moyenne des valeurs x_i à la puissance *r*. Soit

$$\bar{x} = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^r\right]^{\frac{1}{r}}$$

En pratique, on ne calcule cependant que les moyennes d'ordre $r = -1$ (moyenne harmonique), $r \to 0$ (moyenne géométrique), $r = 1$ (moyenne arithmétique) et $r = 2$ (moyenne quadratique).

4. Généralisation de la moyenne/ la moyenne harmonique

Exemple : Un automobiliste a effectué un trajet total de 600 km. Il a parcouru 300 km à une vitesse moyenne de 100 km/h et 300 km à une vitesse moyenne de 60 km/h. On souhaite déterminer la vitesse moyenne avec laquelle l'automobiliste a traversé les 600 km.

Comme on cherche une vitesse moyenne, on est tenté d'utiliser la moyenne arithmétique. Dans ce cas, la vitesse moyenne est donnée par

$$V_m = \bar{x} = \frac{100+60}{2} = 80 \text{ km/h}$$

4. Généralisation de la moyenne/ la moyenne harmonique

Ainsi, les 600 km auraient été parcourus à la vitesse moyenne de 80 km/h ce qui est bien entendu faux. En effet, d'après cette valeur moyenne l'automobiliste aurait consacré

$$\frac{600\ \text{km}}{80\ \text{km/h}} = 7{,}5\text{heures}$$

pour le trajet. Cependant, les vitesses moyennes sur les deux tranches donne une durée de

$$\frac{300\ \text{km}}{100\ \text{km/h}} + \frac{300\ \text{km}}{60\ \text{km/h}} = 8\ \text{heures.}$$

4. Généralisation de la moyenne/ la moyenne harmonique

Lorsqu'on calcule la vraie vitesse moyenne en utilisant sa formule de définition on trouve 75 km/h

$$V_m = \frac{\text{Dis}\,tan\,c\,e}{\text{Durée}} = \frac{600}{\frac{300}{100} + \frac{300}{60}} = \frac{2}{\frac{1}{100} + \frac{1}{60}}$$

C'est la formule correcte de la moyenne dans cet exemple. Comme on peut le constater elle se présente comme l'inverse de la moyenne arithmétique des inverses des valeurs. Elle est appelée moyenne harmonique.

4. Généralisation de la moyenne/ la moyenne harmonique

Définition : La moyenne harmonique, notée *H*, est la moyenne d'ordre - 1, elle se définit comme l'inverse de la moyenne arithmétique des inverses des valeurs. Soit

$$H = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^{-1}\right]^{-1} = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{x_i}\right]^{-1} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{x}}$$

Bien entendu, dans le cas d'une série statistique ou de données groupées en classes, la formule précédente est valable avec néanmoins, $n_i = 1$ dans le premier cas et $x_i = c_i$ dans le second.

Pour garder le même principe de présentation d'une moyenne *i.e.* rapport entre la masse globale et l'effectif, la moyenne harmonique est souvent exprimée par son inverse. Soit :

$$\frac{1}{H} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{x_i}}{n}$$

4. Généralisation de la moyenne/ la moyenne harmonique

La moyenne harmonique s'utilise à chaque fois que la grandeur varie selon une raison inverse d'une autre valeur. Il s'agit essentiellement de variables qui se présentent sous forme de rapports ou de pourcentages. On peut penser à des vitesses, taux de change, prix par article, lits par patients, instituteurs par habitants etc.

.

.

4. Généralisation de la moyenne/ la moyenne géométrique

Exemple. On a placé 10 000 dirhams pendant trois années. L'obligation rapporte 5% la première année, 8% la deuxième année et 11% la dernière année. Calculons le taux d'intérêt moyen sur les 3 années.

Là encore, on est tenté d'utiliser la moyenne arithmétique. Cependant il est erroné d'assimiler un taux d'intérêt moyen à une telle moyenne. En effet, la moyenne arithmétique montre que l'obligation est placée à un taux d'intérêt annuel moyen de 8% puisque

$$\bar{x} = \frac{5+8+11}{3} = 8\%.$$

4. Généralisation de la moyenne/ la moyenne géométrique

Aussi, on s'attendra à la fin des trois années à récupérer 12 597,12 dirhams $(10\,000 \times 1{,}08^3)$. Alors que la vraie somme que la banque acceptera de nous donner est de seulement 12 587,40 dirhams puisque

$$10\,000 \times 1{,}05 \times 1{,}08 \times 1{,}11 = 12587{,}4$$

Le taux d'intérêt moyen, τ_m, se calcule alors de la manière suivante

$$10\,000 \times g \times g \times g = 12587{,}4$$

où $g = 1 + \tau_m$ est le facteur d'intérêt

En égalisant les deux dernières équations il vient :

$$10\,000 \times g \times g \times g = 10\,000 \times 1{,}05 \times 1{,}08 \times 1{,}11$$

4. Généralisation de la moyenne/ la moyenne géométrique

Ou encore

$$g = (1{,}05 \times 1{,}08 \times 1{,}11)^{\frac{1}{3}} = 1{,}07972$$

Soit un taux d'intérêt moyen de 7,972%.

Comme on peut le constater, le facteur d'intérêt moyen *g* est la racine troisième du produit de trois facteurs d'intérêt ; c'est la moyenne géométrique.

4. Généralisation de la moyenne/ la moyenne géométrique

Définition. La moyenne géométrique, notée G, est la moyenne d'ordre $r \to 0$. Elle se définit comme la racine $n^{\text{ième}}$ du produit de n valeurs positives.

$$G = (x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n)^{\frac{1}{n}},$$

Où :

$$G = (x_{11}^{n_1} \times x_2^{n_2} \times \cdots \times x_k^{n_k})^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{i=1}^{k} x_i^{n_i} \right)^{\frac{1}{n}}$$

si certaines valeurs se répètent plusieurs fois.

Là encore, pour garder le même principe de construction de la moyenne arithmétique, la moyenne géométrique est généralement exprimée par son logarithme.

$$log(G) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i \, log(x_i) = \sum_{i}^{k} f_i \, log(x_i)$$

4. Généralisation de la moyenne/ la moyenne géométrique

Utilisations. La moyenne géométrique s'utilise pour le calcul de la moyenne de valeurs se présentant sous forme de taux de croissance tels que les taux d'intérêt et divers taux de croissance.

4. Généralisation de la moyenne/ la moyenne quadratique

Définition : La moyenne quadratique, notée Q, est la moyenne d'ordre r =2. Elle s'écrit

$$Q = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2\right]^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2\right]^{1/2}$$

Utilisation : Elle s'utilise pour le calcul de la moyenne de valeurs qui présentent des signes différents comme des écarts.

4. Généralisation de la moyenne/ la moyenne quadratique

Exemple : 5 étudiants ont obtenu les notes suivantes :

7 ; 9 ; 10 ; 11 ; 13

On souhaite avoir une idée sur les différences de niveau entre les étudiants. Pour ce faire il fait calculer l'écart moyen à la moyenne.

La moyenne arithmétique est donnée par

$$\overline{x} = \frac{7 + 9 + 10 + 11 + 13}{5} = 10$$

L'écart moyen par rapport à la moyenne arithmétique est donné par

$$\overline{E} = \frac{(7 - 10) + (9 - 10) + (10 - 10) + (11 - 10) + (13 - 10)}{5}$$

4. Généralisation de la moyenne/ la moyenne quadratique

Cela signifie que les étudiants présentent le même niveau. Or il est clair que ce n'est pas le cas. L'utilisation de la moyenne arithmétique n'est pas appropriée.

La moyenne appropriée est la moyenne quadratique :

$$\overline{E} = \left[\frac{(7-10)^2 + (9-10)^2 + (10-10)^2 + (11-10)^2 + (13-10)^2}{5}\right]^2 = 2$$

Ainsi, l'écart moyen entre les étudiants de 2 points.