

Chapitre 5. Les caractéristiques de concentration



1. L'INDICE DE CONCENTRATION
2. LA COURBE DE LORENZE ET INDICE DE GINI

Chapitre 5. Les caractéristiques de concentration



1. L'indice de concentration

- La médiale
- L'indice de concentration
- Coefficient de Fischer

2. La courbe de Lorenz et indice de Gini

- La courbe de Lorenz
- L'indice de GINI

Chapitre 5. Les caractéristiques de concentration



La notion de concentration est très proche de la notion de dispersion. Elle permet d'examiner comment une quantité appelée masse est distribuée entre les individus d'une population. Les caractéristiques de concentration n'ont de sens que pour les variables dont la somme admet une signification concrètes : salaires, revenus, parts de marchés, etc.

Généralement deux outils sont utilisés pour apprécier la concentration :

- L'approche algébrique qui débouche sur le calcul de l'indice de concentration
- L'approche graphique à travers la courbe de Lorenz et qui débouche sur le calcul de l'indice de GINI

Chapitre 5. Les caractéristiques de concentration

1. L'indice de concentration



La logique de la construction de l'indice de concentration consiste à comparer deux caractéristiques de tendance centrales spécifiques : la médiane et la médiale.

:

:

.

.

Chapitre 5. Les caractéristiques de concentration

1. L'indice de concentration / La médiale



La médiale :

- La médiale est une notion proche de la médiane.
- Si la médiane est la valeur de la variable qui permet de scinder l'effectif en deux parties égales, la médiale est la valeur de la variable qui scinde la masse (somme des valeurs) en deux parties égales.
- En termes techniques : si la médiane est la caractéristique de tendance centrale de la distribution (x_i, n_i) , la médiale est la même caractéristique de tendance centrale de la distribution $(x_i, n_i x_i)$.
- Elle se calcule de la même manière que la médiane.

Chapitre 5. Les caractéristiques de concentration

1. L'indice de concentration / La médiale

- Dans le cas d'une distribution en données groupées, elle se calcule en deux étapes.
 - *Etape 1.* On détermine la classe médiale.
 - *Etape 2.* On calcule par interpolation linéaire une approximation de la médiale.

$$Ml = b_{i-1} + a_i \left(\frac{1/2 - F_{i-1}^m}{f_i^m} \right)$$

Dans cette équation, $[b_{i-1}, b_i[$ est la classe médiale, f_i^m est la fréquence relative de la masse et F_{i-1}^m la fréquence cumulée de la masse.

Interprétation : Si le caractère étudié est le salaire par exemple alors la médiale s'interpréterait comme le salaire tel que les individus qui gagnent un salaire inférieur au salaire médial se partagent la moitié de la masse salariale

Chapitre 5. Les caractéristiques de concentration

1. L'indice de concentration / La médiale



Exemple. Considérons la distribution des salaires (en milliers dirhams) suivante :

x_i	n_i
[1, 2[	20
[2, 3[	40
[3, 4[	60
[4, 5[	20
[5, 6[	10
Total	150

Chapitre 5. Les caractéristiques de concentration

1. L'indice de concentration / La médiale

Exemple. On construit la distribution $(x_i, n_i x_i)$

x_i	n_i	$n_i x_i$	f_i^m	$F_i^{+,m}$
[1, 2[	20	30	0,06	0,06
[2, 3[	40	10	0,21	0,27
[3, 4[	60	210	0,43	0,70
[4, 5[	20	90	0,19	0,89
[5, 6[	10	55	0,11	1
Total	150	485	1	----

Etape 1. La classe médiale est la classe [3, 4[

Etape 2. Calcul de la médiale par interpolation linéaire

$$Ml = b_{i-1} + a_i \left(\frac{1/n - F_{i-1}^m}{f_i^m} \right) = 3 + 1 \left(\frac{0,5 - 0,27}{0,43} \right) = 3,5358 \equiv 3535,8\text{DH}$$

Ainsi, les salariés qui gagnent un salaire inférieur à 3535,8DH se partagent la moitié de la masse salariale (c.a.d. 485/2).

Chapitre 5. Les caractéristiques de concentration

1. L'indice de concentration / L'indice de concentration

- Le principe de l'indice de concentration est de considérer une distribution parfaitement égalitaire (absence de concentration)
- La moitié des salariés se partagent exactement la moitié la masse salariale.
- Lorsque la médiane est juste égale à la médiale. Pour obtenir un indice c'est-à-dire une quantité sans unité ni dimension et compris entre 0 et 1 il suffit de diviser cet écart sur l'étendue.

Ainsi, l'indice de concentration est donné par : $IC = \frac{Ml - Mé}{e}$

- Si $IC = 0$ cela signifie qu'il n'y a pas de concentration
- Si $IC = 1$ cela signifie que la concentration est maximale.

Chapitre 5. Les caractéristiques de concentration

1. L'indice de concentration / L'indice de concentration

Reprenons notre exemple :

- Calculons d'abord la médiane. La classe médiane est la classe [3, 4[. La méthode de l'interpolation linéaire donne une approximation de la médiane comme suit :

$$Ml = b_{i-1} + a_i \left(\frac{1/2 - F_{i-1}}{f_i} \right) = 3 + 1 \left(\frac{0,5 - 0,4}{0,4} \right) = 3,25 \equiv 3250\text{DH}$$

L'étendue est donnée par 5000 DH (6000 – 1000).

Ainsi, l'indice de concentration est donné par :

$$IC = \frac{Ml - Mé}{e} = \frac{3535,8 - 3250}{5000} = 0,057 \equiv 5,7\%$$

Il est donc possible de considérer que la distribution des salaires présente une faible concentration.

Chapitre 5. Les caractéristiques de concentration

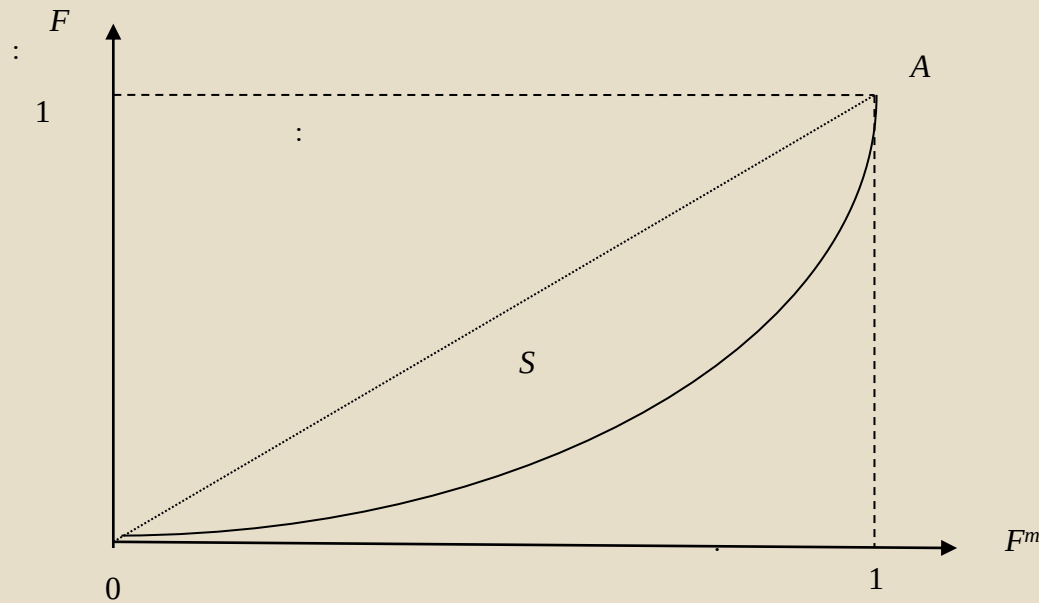
2. la courbe de Lorenz et indice de GINI/Courbe de Lorenz

- Dans l'exemple précédent on examinait combien se partagent la moitié des salariés. C'est-à-dire est ce que 50% des salariés se partagent 50% de la masse salariale.
- Dans le cas de l'approche graphique on se pose la question si la part des salariés qui gagnent moins d'un certain salaires se partagent la même part de la masse salariale. C'est-à-dire si 10%, 20%, etc. des salariés se partagent 10%, 20%, etc. de la masse salariale.
- Ainsi, la courbe de **Lorenz** ou courbe de concentration est donnée par l'ensemble des combinaisons F_i et F_i^m .

Chapitre 5. Les caractéristiques de concentration

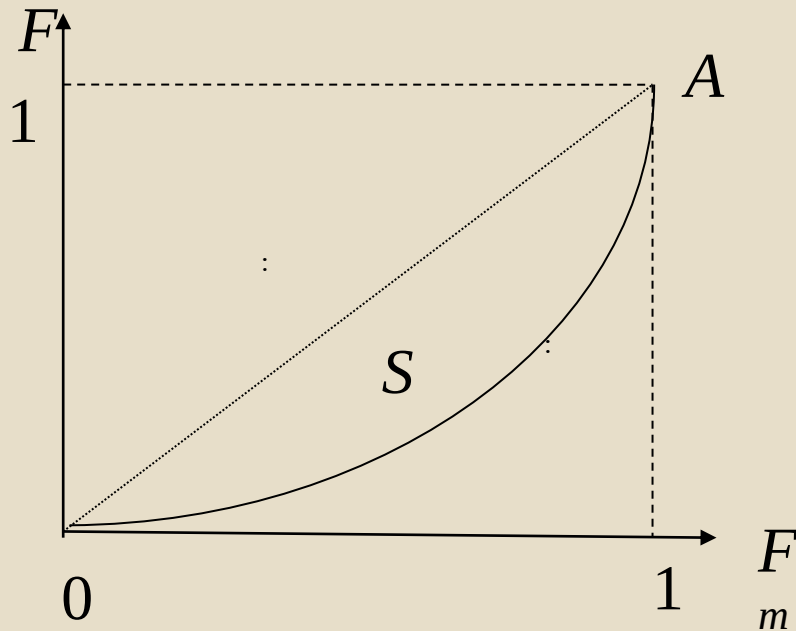
2. la courbe de Lorenz et indice de GINI/Courbe de Lorenz

Si on utilise les fonctions fréquences cumulées croissantes, la forme générale de la courbe de concentration est donnée par le graphique suivant :



Chapitre 5. Les caractéristiques de concentration

2. la courbe de Lorenz et indice de GINI/Courbe de Lorenz



- La première bissectrice représente la courbe de Lorenz lorsque la concentration est nulle.
- Plus la courbe de Lorenz s'éloigne de la première bissectrice plus la concentration est forte.
- La surface entre la première bissectrice et la courbe de Lorenz, notée S , est appelé surface de concentration. Elle mesure le degré de concentration.
- Il est possible de calculer une approximation de cette surface, il s'agit de l'indice de GINI

Chapitre 5. Les caractéristiques de concentration

2. la courbe de Lorenz et indice de GINI/L'indice de GINI

- L'indice de GINI est un moyen plus objectif de lire la courbe de concentration.
- Pour obtenir une quantité sans dimension ni unité et de surcroît compris entre 0 et 1, il est défini comme le rapport entre la surface de concentration S et la surface du triangle $0A1$ qui est égale à $1/2$.

Soit :

$$IG = \frac{S}{1/2} = 2S$$

- Une méthode très utilisée pour calculer une approximation de l'indice de GINI consiste à calculer d'abord la surface de la surface complémentaire SC en utilisant la méthode des trapèzes et déduire ensuite S et IG . IL vient :

$$IG = 2S = 2(1/2 - SC)$$

Chapitre 5. Les caractéristiques de concentration

2. la courbe de Lorenz et indice de GINI/L'indice de GINI

$$IG = 2S = 2(1/2 - SC)$$

L'idée de cette méthode est d'approcher la surface SC par un ensemble de trapèzes. :

$$SC = \sum_{i=1}^k SC_i$$

avec $SC_i = \frac{(F_i + F_{i-1})(f_i - f_{i-1})}{2}$ la surface du trapèze relatif à la classe i .

Chapitre 5. Les caractéristiques de concentration

2. la courbe de Lorenz et indice de GINI/L'indice de GINI

Exemple. Reprenons notre exemple relatif à la distribution des salaires. La courbe de Lorenz est construite à partir des données suivantes :

F_i^m	F_i
0,06	0,13
0,27	0,40
0,70	0,80
0,89	0,93
1,0	1,0

Calculons d'abord les surfaces trapèzes. Il y'en a 5 (le nombre de modalités) :

$$SC_1 = [(0 + 0,06) \times 0,13]/2 = 0,039$$

$$SC_2 = [(0,06 + 0,27) \times 0,27]/2 = 0,0445$$

$$SC_3 = [(0,27 + 0,7) \times 0,4]/2 = 0,194$$

$$SC_4 = [(0,7 + 0,89) \times 0,13]/2 = 0,103$$

$$SC_5 = [(0,89 + 1) \times 0,07]/2 = 0,066$$

Chapitre 5. Les caractéristiques de concentration

2. la courbe de Lorenz et indice de GINI/L'indice de GINI

La surface complémentaire est donnée par :

$$SC = 0,039 + \dots + 0,066 = 0,4114$$

:

On déduit la surface de concentration :

$$S = 0,5 - 0,4114 = 0,0886$$

Et l'indice de *GINI* :

$$IG = 2 \times 0,0886 = 0,1772 \equiv 17,72$$

On notera que l'indice de GINI est bien entendu par construction toujours plus élevé que l'indice de concentration