Université Abdelmalek Essaâdi
L'école nationale de commerce et de Gestion - Tanger
ENCG-T

Module : Techniques Quantitatives
Sous-Module : Probabilité et Statistiques

⇒ les Théoremes conventionnels fondamentaux

$A \sqsubset B$ ou $B \sqsupset A \Rightarrow$ A est inclu dans B

$A \sqsubset B$ ou $B \sqsubset A \Rightarrow$ A et B sont identiques $(A = B)$

$A \sqsubset B$ et $A \neq B \Rightarrow$ A est sous-ensemble propre de B

Théorème = T

$T_1 \Rightarrow A \sqsubset B$ et $B \sqsubset C$ Alors $A \sqsubset C$

l'ensemble vide $\varnothing$ est un sous-ensemble d'un ensemble quelconque

$T_2 \Rightarrow A \sqcup B = B \sqcup A$ Commutativité des unions

$T_3 \Rightarrow A \sqcap B = B \sqcap A$ Commutativité des intersect°s

$T_4 \Rightarrow A \sqcup (B \sqcup C) = A \sqcup B \sqcup C$ Associativité des unions.

$T_5 \Rightarrow A \sqcap (B \sqcap C) = A \sqcap B \sqcap C$ Associativité des intersect°s

$T_6 \Rightarrow A \sqcap (B \sqcup C) = (A \sqcap B) \sqcup (A \sqcap C)$ Première loi de distribut°

$T_7 \Rightarrow A \sqcup (B \sqcap C) = (A \cup B) \sqcap (A \sqcup C)$ Seconde loi de distribut°

$T_8 \Rightarrow A \sqcap \varnothing = \varnothing$ et $A \sqcup \varnothing = A$

$T_9 \Rightarrow A \sqcup \Omega = \Omega$ et $A \sqcap \Omega = A$

⇒ Définition des ensembles

les éléments constituant un ensemble peuvent être recensés selon deux approches :

1 - le dénombrement (Décomposition Spaciale)

il s'agit de cloisonner séparément les éléments en forgeant un univers Ensemble $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots x_n\}$

2 - l'indication de la propriété

Pour cette approche, il convient de normaliser l'univers conformément à une propriété prévalue

Ensemble $Y = \{x \,/\, x$ possède une caractéristique particulière$\}$

Calcul des Probabilités

Ω correspond à l'univers des éventualités, les issues ou les cas possibles

$$P(\text{évenement donné}) = \frac{\text{Cas Favorables}}{\text{Cas éventuels}}$$

Probablité conditionnelle

P(évenement désiré \ évenement étant survenu)
$\qquad E_d \qquad\qquad\qquad E_s$

$$P(E_d \setminus E_s) = \frac{P(E_d \cap E_s)}{P(E_s)} = P_{E_s}(E_D)$$

les évenement indépendants

Soient A et B deux occurences Aléatoires

A et B sont independants Si et SSI

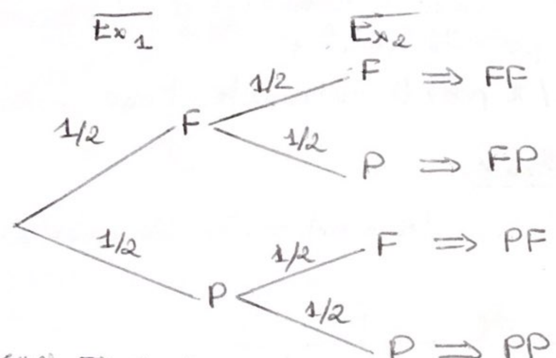
$$P(A \sqcap B) = P(A) \times P(B)$$

l'incompatibilité des évenements

A et B sont deux évenements incompatibles
Si et SSI
$P(A \cap B) = \emptyset$

le Diagramme Arborescent

Soit l'épreuve aléatoire « Lancer une pièce métallique deux fois consécutives » Quelles sont les probabilités qui en découlent



Nb1 : la probabilité d'un chemin correspond au produit des Probabilités de ce m̂ chemin

Nb2 : la somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est 1

4 issues ⟹ expérience ordonnée

3 issues ⟹ expérience non ordonnée

les Permutations

La Permutation s'assimile via le concept de réarrangement d'une plage donnée (expérience ordonnée totale)

$P^n_n = n!$

la Permutation (Effectif total $= \sum_{i=1}^{k} n_i$ ⟹ effectifs partiels)

On a $n = n_1 + n_2 + \dots n_k$

Alors $P = \dfrac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$

Arrangement

les issues correspondant à une expérience ordonnée

$A^p_n = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

Astuce pour les calculs hâtifs
A^k_n = multiplication récurrente de k terme ($A^3_5 = 5 \times 4 \times 3 = 60$)

Combinaisons

Notation $\binom{n}{p}$ ou C^p_n

Combinaison sans remise :
$C^p_n = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

Combinaison avec Remise
$C^p_{n+p-1} = \dfrac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!}$

$C^0_n = C^n_n = 1$

$C^1_n = n = C^{n-1}_n$

$C^r_n = C^{n-r}_n$

$C^{r+1}_{n+1} = C^r_n + C^{r+1}_n$

Coefficients binomiaux (Developpement du binôme de newton)
Pour les identités remarquables $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} x^i y^{n-i} \binom{n}{p}$

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	6	1

Exp : $C^3_5 = C^{2+1}_{4+1} = C^2_4 + C^3_4$
$= 6 + 4$
$C^3_5 = 10$

Conçu et Rédigé
Par : Ayoub Sadik

aléatoire X

désigne un caractère prodigieux qui prévaut un espace chantillonnage donnée, elle est généralement notée X elle abrite autant de valeur.

l'Espérance mathématique E(X)

elle correspond à la valeur moyenne espérée par un observateur lors de la survenance de la V.A X

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} P_i x_i$$

sachant que P_i: la probabilité correspondante
x_i: la valeur qu'abrite X

La Variance

elle mesure la dispersion d'une variable Aléatoire X
elle mesure également la déviation moyenne autour de la moyenne espérée

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} (P_i x_i)^2$$

l'écart type : $\sigma_X = [V(X)]^{1/2}$

les lois Paramétriques de la Probabilité

Ce sont des lois optimisées sous contrainte permettant d'attribuer un caractère particulier à échantillon universel et Calculer sa probabilité afférente

L'école nationale nationale de commerce et De Gestion
ENCG-T
Université Abdelmalek Essaâdi

elles sont forgées à partir d'un ou deux paramètres (Cas fréquent)

I- les lois Discrètes

La loi de Bernoulli

Notation : X suit une loi de Bernoulli $\Rightarrow X \sim \beta(p)$
Si elle prend restrictivement les valeurs 1 et 0

$$P(X=k) = p^k (1-p)^{1-k}$$

Propriétés : $E(X) = p$ $\quad V(X) = p(1-p)$

Champs d'application et Conditions de Validité : la loi de Bernoulli est valable lorsqu'il s'agit d'une seule expérience prenant deux issues élementaires l'une correspond au succès (l'issu dont on s'intéresse) et l'autre correspond à l'occurrence réciproque

La loi Binomiale

Notation : X suit une loi binomiale $\Rightarrow X \sim B(n,p)$
Si elle abrite étroitement l'intervalle $[0,n]$

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Propriétés : $E(X) = np$ $\quad V(X) = np(1-p)$

Champs d'application et Conditions de Validité : l'utilisation de la loi B s'associe aux nombre de tentatives figées dès le départ pour aboutir aux calculs de l'occurrence souhaitée

n = nombre de tentatives
p = probablité de l'occurence souhaitée (succès)
k = la Survenance.

la loi Géométrique

Notation : X suit une loi géométrique $\Rightarrow X \sim G(p.k)$

la distribution est modélisée par :

$$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$$

Propriétés : $E(X) = 1/p$ $\quad V(X) = (1-p)/p^2$

Champs d'application et Conditions de validité : la loi géométrique aboutit aux Calculs d'une occurrence désirée survenue pour la première fois à un instant k

P = Probabilité de succès
k = l'instant.

la loi de Poisson

Notation : X suit une loi de Poisson $\Rightarrow X \sim P(\lambda)$

la distribution est optimisée par :

$$P(X=n) = \frac{e^{-\lambda}}{n!} \cdot \lambda^{n}$$

Propriétés : $E(X) = V(X) = \lambda$

la condition de validité et le Champs d'application : la loi P permet de calculer la survenance multiple (n fois) d'une occurrence qui est habituellement survenue à un instant que il se peut que l'instant soit raccourci ou élargi

les Variables Aléatoires continues

Rappel : fonctions primitives et Calcul intégral
f est une fonction définie et strictement continue sur un intervalle I, $(\forall x \in I) \Rightarrow f : x \longmapsto I$
F est la fonction primitive de f sur I

Primitive usuelle :

$$\int 1\,dx = x + c \Rightarrow x + C$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \Rightarrow \ln(|x|) + C \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\int e^{x}\,dx = e^{x} + c \Rightarrow \frac{e^{ax}}{a} + C$$

$$\int U'(x) \cdot U(x)^{n}\,dx = \frac{U(x)^{n+1}}{n+1} + C$$

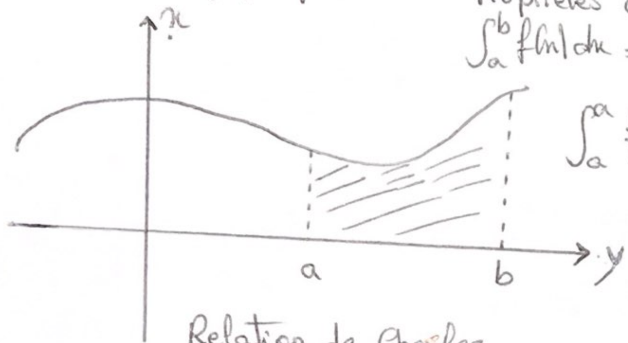
$$\int \frac{U'(x)}{U(x)}\,dx = \ln(|U(x)|) + C$$

...égral.

... est fonction continue sur $[a,b]$ et F sa fonction ...ive sur $[a,b]$. l'intégrale de a à b se note :

$$\int_a^b f(x)\,dx \;/\; \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

modélisation graphique :



Propriétés conventionnelles :

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Relation de Chasles

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

les lois continues $\Rightarrow$ la loi exponentielle

Soit λ un réel strictement positif

la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ est une densité de probabilité

$\lambda > 0$ et $\forall x \in [0,+\infty[$, $e^{-\lambda x} > 0$

Cette loi probabiliste consiste à intégrer la fonction de densité aux bornes de l'Air indiquée.

Université Abdelmalek Essaâdi
L'école nationale de commerce et de Gestion
Tanger - ENCG-T

Nb_1 : les intégrations tolèrent les inégalités larges.

Nb_2 : l'intégration qui penche vers l'infinie est une intégration complémentaire.

la loi normale

Notation : $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X$ suit une loi normale dont la densité :

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Propriétés : $E(X) = \mu$ $\quad V(X) = \sigma^2$

Limites apparentes : la loi normale n'est pas tabulée Ce qui suppose des Calculs très alambiqués

la loi normale centré réduite (la loi tabluée standardisée)

Notation : X suit une loi NCR dont les paramètres $N(0,1) \Rightarrow X \sim N(0,1)$

Si On pose Z (la Variable tabulaire)

On aura $Z_1 = \frac{X-\mu}{\sigma}$ On obtient une fonction de densité :

$$f(Z) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{\frac{Z^2}{2}}$$

Propriétés : $E(X)=0$ et $V(X)=1$

la loi Khi-deux

Notation : la V.A suit une loi Khi deux de paramètres n

$X \sim \chi^2(n)$ avec n = le Degré de liberté

$$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$$

Propriété : $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$

le Théorème Central limité

Soit $X_1, X_2, \dots$ une suites des VA définies dans Espace échantillonnage, et elles sont indépendantes et identiques suivant une loi indéfinie

Alors $S_n = S_1 + S_2 + \dots S_n$

introduisons la standardisation réduite

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \longrightarrow N(0,1)$$

Exigence fondamentale n doit faire l'objet d'une inégalité stricte favorable

$(n > 30) \longrightarrow$ le TCL est valable.