• Principe de recollement Cours

f_3 est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

② On étudie la continuité de f_3 sur 0

• $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = 1 = f_3(0)$

f_3 est continue à droite de 0

• $\lim\limits_{t \to 0^-} f(t) = -1 \neq f_3(0)$

Alors f_3 n'est pas continue en 0

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}^*$

$f_n(t) = \begin{cases} \frac{(3+t)^n - 1}{t+2} & si\ t \neq -2 \\ n & si\ t = -2 \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}^*$

① • f_n est sur $\mathbb{R} - \{-2\}$, c'est f rationnelle continue sur cet ensemble

② • On étudie la continuité en -2

• $\lim\limits_{x \to -2} \frac{(3+t)^n - 1}{t+2}$ FI

Règle de l'hopital

• $\lim\limits_{t \to -2} \frac{(3+t)^n - 1}{t+2} = \lim\limits_{t \to -2} \frac{n(3+t)^{n-1}}{1} = n$

$= f_n(-2)$

Alors f_n est continue sur -2

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$

2) - On détermine a et b tels que : $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in]-\infty, 2] \\ \frac{a}{x} - b & si\ x \in]2, 6] \\ 1 & si\ x \in]6, +\infty[\end{cases}$

Soit continue sur $\mathbb{R}$

• f est continue sur $]-\infty, 2[$ car c'est une constante $f(x) = 0$

• f est continue sur $]2, 6[$ car c'est une fonction rationnelle

• f est continue sur $]6, +\infty[$ car c'est une constante

• Principe de recollement :

f est continue sur $]-\infty, 2[\cup]2, 6[\cup]6, +\infty[$

• f est continue sur $\mathbb{R}$ si f est continue sur 2 et 6

$\begin{cases} \lim\limits_{t \to 2^+} f(t) = \lim\limits_{t \to 2} f(t) = f(2) \\ \lim\limits_{t \to 6^+} f(6) = \lim\limits_{t \to 6^-} f(t) = f(6) \end{cases}$

$\begin{cases} 0 = \frac{a}{2} - b \\ 1 = \frac{a}{6} - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 1 = \frac{2b - 6}{6} \end{cases}$

$\begin{cases} a = 2b \\ 1 = \frac{b}{3} - b = -\frac{2}{3} b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{3}{2} \\ a = -3 \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

IV - Continuité :

$$f_1(t) = \begin{cases} t^2 + \frac{|t|}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

- f est continue sur $]0, +\infty[$

$$f_1(t) = \begin{cases} t > 0 & t^2 + \frac{|t|}{t} = t^2 + 1 \\ t < 0 & t^2 + \frac{|t|}{t} = t^2 - 1 \end{cases}$$

1)
- f_1 est continue sur $]0, +\infty[$

car $f_1(t) = t^2 + 1$ est polynomiale

- f_1 est continue sur $]-\infty, 0[$

car $f_1(t) = t^2 - 1$ est polynomiale

- Principe de recollement

f_1 est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

2)
- On étudie la conuité en 0

- $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = 1 = f(0)$

- $\lim\limits_{t \to 0^-} f(t) = -1 \neq f(0)$

f n'est pas continue en 0

car $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) \neq \lim\limits_{t \to 0^-} f(t)$

<u>Conclusion</u> : f est continue sur $\mathbb{R}^*$

est non continue en 0.

$$f_2(t) = \begin{cases} \frac{t^3 - 8}{t - 2} & \text{si } t \neq 2 \\ 12 & \text{si } t = 2 \end{cases}$$

1)
- f_2 est continue sur $\mathbb{R} - \{2\}$

car $f_2(t) = \frac{t^3 - 8}{t - 2}$ est une Fonction rationnelle sur son D_f

2)
- on étudie la continuité en 2

$\lim\limits_{t \to 2} f_2(t) = \lim\limits_{t \to 2} \frac{t^3 - 8}{t - 2}$ FI

Régle de l'hopital

$\lim\limits_{t \to 2} f_2(t) = \lim\limits_{t \to 2} \frac{3t^2}{1} = 12 = f(2)$

- $f_2(t)$ est continue en 2

Conclusion : f_2 est continue sur $\mathbb{R}$

- $f_3(t) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{t}\right) \sqrt{t^2} & , t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

<u>Rappels</u> $\sqrt{t^2} = |t|$

$$f_3(t) = \begin{cases} \text{si } t > 0 \ ; \ \left(1 + \frac{1}{t}\right) \cancel{t} = t + 1 \\ \text{si } t < \ ; \ \left(1 + \frac{1}{t}\right) \times (-t) = -t - 1 \end{cases}$$

1)
- f_3 est continue sur $]0; +\infty[$ car $f_3(t) = t + 1$ est f. polynomiale sur cet intervalle.

- f_3 est continue sur $]-\infty, 0[$

$f_3(t) = -t - 1$ est f. polynomiale sur cet intervalle

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1$$

Rappels : $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

- $\lim_{x\to 0} (1+x^2)^{1/x}$ $(0^{+\infty})$

Rappels : $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

$$(1+x^2)^{1/x} = e^{\frac{\ln(1+x^2)}{x}}$$

Posons $\begin{cases} x^2 = t & \Rightarrow x = \sqrt{t} \\ x \to 0^+ & \Rightarrow t \to 0^+ \end{cases}$

$$\frac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} \times \frac{\ln(1+t)}{t}$$

$$\lim_{x\to 0^+} (1+x^2)^{1/x} = \lim_{t\to 0^+} e^{\sqrt{t}\,\underbrace{\left(\frac{\ln(1+t)}{t}\right)}_{\to 1}}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} e^{\sqrt{t}}$$

$$= e^0 = 1$$

- $\lim_{x\to +\infty} x^{1/x}$ FI $+\infty^0$

$$\lim_{x\to +\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}$$

$$= e^{\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}}$$

$$= e^0 = 1$$

car $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^2\sqrt[6]{x}}$$

Rappels :

① $a^n \times a^m = a^{n+m}$

② $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

③ $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$$x^2 \times \sqrt[6]{x} = x^2 \times x^{\frac{1}{6}} = x^{2+\frac{1}{6}} = x^{\frac{13}{6}}$$

$$\frac{e^{2x}}{x^2\sqrt[6]{x}} = \frac{e^{2x}}{e^{\frac{13}{6}\ln x}}$$

$$= e^{x\left(2 - \frac{13}{6}\cdot\frac{\ln x}{x}\right)}$$

- $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^2\sqrt[6]{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{x\left(2-\frac{13}{6}\frac{\ln x}{x}\right)}$

$$= e^{\lim_{x\to +\infty} x\left(2-\frac{13}{6}\frac{\ln x}{x}\right)}$$

$$(e^{+\infty})$$

$$= +\infty$$

- $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

- $\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty$

- $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-2}{\ln x}$

Régle de l'hopital

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-2}{\ln x} = \frac{3x^2}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim 3x^3 = +\infty$$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \to \pm 1 \\ x \to \pm\infty}} \dfrac{|x^2+x|-2}{|x|-1}$.

x	$-\infty$ -1	0	1	$+\infty$
x^2+x	$+$ 0	$-$ 0	$+$	$+$
$\lvert x^2+x\rvert$	x^2+x 0	$-x^2-x$ 0	x^2+x	x^2+x
x	$-$	$-$ 0	$+$	$+$
$\lvert x\rvert$	$-x$	$-x$ 0	x	x
$f(x)$	$\dfrac{x^2+x-2}{-x-1}$	$\dfrac{-x^2-x-2}{-x-1}$	$\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$	$\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x^2+x|-2}{|x|-1} = \dfrac{-2}{-1} = 2$

- $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2+x-2}{-x-1} = -\infty \quad \left(\dfrac{-2}{0^-}\right)$

- $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{-x^2-x-2}{-x-1} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ FI $\dfrac{0}{0}$

R Hopital

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x+1}{1} = 3$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$

IV - Continuité :

Rappels

① f est continue en $a \iff \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

② f est continue à droite de a si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

③ f est continue à gauche de a si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

④ f est continue en a

Alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

⑤ Les fonctions usuelles :

Fonctions rationnelles, Fonctions Polynomiales, $x \to e^x$, $x \to \sqrt{x}$, $x \to |x|$ sont continues sur leur

⑥ Principe de recollement
التراب

Si f est continue sur $]a_1, b_1[$

, f est continue sur $]a_2, b_2[$

⋮

Donc f est contin $]a_n, b_n[$

Alors f est continue sur $]a_1, b_1[\cup]a_2, b_2[\cup]a_n, b_n[$

$\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

Rappels

① $\sqrt[3]{x^3} = x$

② La fonction $f : \sqrt[3]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}$

③ Si g est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe alors

$$\lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{f(x)} =$

$$\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}} = \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{x^3+1}} = \sqrt[3]{\frac{x^3}{x^3+1}}$$

Rappels $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+1}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{x^3}{x^3+1}}$$

$$= 1$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{x+\sqrt{x} - x}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} + 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x}}{x}} + 1}$$

on sait que $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{1}{2}$

Rappels : ① $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\times g(x) = \lim g(x) \times L$

② $\sqrt{x^2} = |x|$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3x+7} + ax + b\right)$

$$\sqrt{x^2+3x+7} + ax + b = A$$

$$A = \sqrt{x^2} \times \sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}} + ax + b$$

$$= \underset{f}{x}\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}} + a + \frac{b}{x}\right)}_{g}$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} A = \lim\limits_{+\infty} f \times \lim\limits_{+\infty} g$

$$= \lim_{x\to+\infty} x \times \lim \left(\sqrt{\frac{3}{x}+1+\frac{7}{x^2}} + a + \frac{b}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} A = \lim_{+\infty} x(a+1)$$

$$\lim_{x\to+\infty} A = \lim x(a+1)$$

Si $a+1>0$: $+\infty$ — si $a+1<0$: $-\infty$ — si $a+1=0$: FI

cas $a+1=0 \iff a=-1$

$$\sqrt{x^2+3x+7}+ax+b = \sqrt{x^2+3x+7}-x+b$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2+3x+7}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3x+7}+x\right)}{\sqrt{x^2+3x+7}+x}+b$$

$$= \frac{\cancel{x^2}+3x+7-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+3x+7}+x}$$

$$= \frac{\frac{7}{x}+3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}}+b$$

$$\lim_{x\to+\infty} B = \frac{3}{2}+b$$

• $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1} = \text{FI } \frac{0}{0}$$

$f(x)=\sqrt[3]{x}-1$; $g(x)=\sqrt[5]{x}-1$

$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$; $g'(x)=\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1} = \lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}} = \frac{5}{3}$$

• $$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}$$

2 Méthode

Rappels ① $x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+1)$

② $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x}}$$

PPCM : Plus Petit commun multiple

PPCM$(2,4)=4$

PPCM$(3,5)=15$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$$

Posons $x=t^{15}$

$$\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1} = \frac{\sqrt[3]{t^{15}}-1}{\sqrt[5]{t^{15}}-1} = \frac{t^{\frac{15}{3}}-1}{t^{\frac{15}{5}}-1}$$

$$= \frac{t^5-1}{t^3-1}$$

• $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1} = \frac{5}{3}$$

$|2t^2 - 6|$

$= \mathbb{R}$

$\in Df_3 \Rightarrow -t \in Df_3$

f_3 n'est ni paire ni impaire car :

1) Elle n'est pas paire puisque

$f_3(1) = 1$ et $f_3(-1) = 3$ donc $f_3(1) \neq f_3(-1)$ } contre exemple pour $t = 1$

2) Elle n'est pas impaire puisque :

$f_3(-1) \neq -f_3(1)$

$f_4(t) = |t+2| - |t-2|$

$Df_4 = \mathbb{R}$ $\quad t \in Df \Rightarrow -t \in Df$

Rappel : $\forall y \in \mathbb{R} \quad |-y| = |y|$

$f_4(-t) = |-t+2| - |-t-2|$

$= |-(t-2)| - |-(t+2)|$

$= |t-2| - |t+2|$

$= -f_4(t)$

Donc $f_4(t)$ est impaire

$f_5(t) = e^t - \frac{1}{e^t}$

Rappels

$\forall t \in \mathbb{R} \quad e^t \neq 0$

$Df_5 = \{ t \in \mathbb{R} \mid e^t \neq 0 \} = \mathbb{R}$

$t \in Df \Rightarrow -t \in Df$

$f_5(-t) = e^{-t} - \frac{1}{e^{-t}}$

$= \frac{1}{e^t} - e^t = -f_5(t)$

$\Rightarrow f_5$ est impaire

III - Limites :

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x^4 + x + 3}{5x^3 + 2x^2 + x + 1} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x^4}{5x^3}$

$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2}{5} x$

$\begin{cases} +\infty \text{ si } x \to +\infty \\ -\infty \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^5} - \sqrt{x}}$

Rappels

1) $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

2) $a^n \times a^m = a^{n+m}$

3) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$x\sqrt{x} = x \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$

$\sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}$

- $\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^5} - \sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{5}{3}}\left(1 - \frac{x^{1/2}}{x^{5/3}}\right)}$

$= \frac{x^{\frac{3}{2} - \frac{5}{3}}}{1 - x^{\frac{1}{2} - \frac{5}{3}}}$

$= \frac{x^{-\frac{1}{6}}}{1 - x^{-\frac{7}{6}}}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-\frac{1}{6}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^{1/6}} = 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-\frac{7}{6}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}} = 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^5} - \sqrt{x}} = 0$

Scanné avec CamScanner

- $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$

1 Méthode : on utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x}^2 - \sqrt{a}^2} = \frac{\cancel{(\sqrt{x} - \sqrt{a})}}{\cancel{(\sqrt{x} - \sqrt{a})}(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

$$\lim\limits_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

2 Méthode : on utilise le conjugué

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$= \frac{\cancel{x - a}}{\cancel{(x - a)}(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

3 Méthode : on utilise la dérivée

Rappels $\lim \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

Posons $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad f(a) = \sqrt{a}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

- $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

4 Méthode : on applique de l'hopital

Remarque : L'hopital est un mathématicien français du 17e siècle il a inventé cette règle.

Rappels les principaux FI

$+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0, 0^{∞}

- si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ est F.I $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$

alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

- on peut prendre $a = \pm\infty$

Posons $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{a}$

$g(x) = x - a$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$g'(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ FI. $\frac{0}{0}$

- on applique alors la règle de l'hopital

- $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$

$= \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$= \lim\limits_{x \to a} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}$

- $\lim\limits_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

Scanné avec CamScanner

دراسة الزوجية

Parité :

$f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite paire si

a) $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

(D_f est dit symétrique)

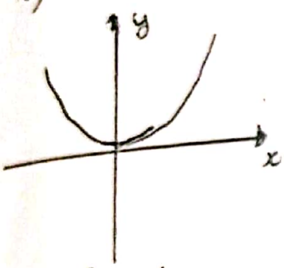
b) $\forall x \in D_f \quad f(-x) = f(x)$

Exemples :

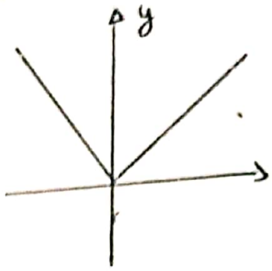
$f(x) = x^2$, $f(x) = |x|$

Remarque :

1) - $f(x) = x^2$



2) $f(x) = |x|$



Une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe de y.

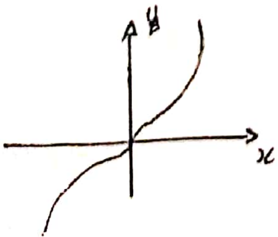
2) - $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite impaire si :

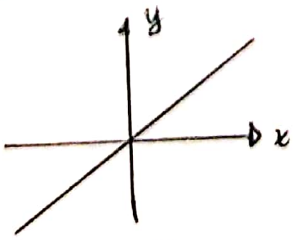
a) $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

b) $\forall x \in D_f \quad f(-x) = -f(x)$

Exemples

$f(x) = x^3$ et $f(x) = x$





Une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine de o.

- $f_1(t) = \frac{t}{1+|t|}$

Rappel :

1) $\forall t \in \mathbb{R} \quad |-t| = |t|$

2) $\forall t \in \mathbb{R} \quad |t| \geq 0$

$\forall t \in \mathbb{R} \quad |t| + 1 \geq 0 + 1$

$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R} \,/\, |t| + 1 \geq 1$

$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R} \,/\, |t| + 1 \neq 0$

$D_{f_1} = \{t \in \mathbb{R} \,/\, 1 + |t| \neq 0\} = \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$

$f_1(-t) = \frac{-t}{1+|-t|} = -\frac{t}{1+|t|} = -f_1(t)$

$\Rightarrow f_1$ est impaire.

- $f_2(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

$n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f_2(t) = t^n$ est polynomiale $\Rightarrow D_{f_2} = \mathbb{R}$

$t \in \mathbb{R} \Rightarrow -t \in \mathbb{R}$

Rappels

1) $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

2) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

- Si n est pair $\quad f_2(-t) = (-t)^n = (-1 \times t)^n$
$= (-1)^n \times t^n$
$= t^n = f_2(t)$

$\Rightarrow$ Si n est pair f_2 est paire

- Si n est impair

$f_2(-t) = (-t)^n = (-1)^n \times t^n = -t^n$
$= -f_2(t)$

Si n est impair f_2 est impaire

$f_{13}(t) = \ln(\ln(\ln(t)))$

Df_{13} :

Rappels :

1) $e^{\ln t} = t$, $e^{\ln(\ln(t))} = \ln(t)$

2) la fonction $f(x) = e^x$ est strictement croissante (car $f'(x) = e^x > 0$)

$x < y \Rightarrow e^x < e^y$

$Df_{13} = \{t \in \mathbb{R} \,/\, t > 0 \text{ et } \ln(t) > 0 \text{ et } \ln(\ln t) > 0\}$

$= D_1 \cap D_2 \cap D_3$

avec $D_1 = \{t \in \mathbb{R} \,/\, t > 0\} =]0; +\infty[$

$D_2 = \{t \in \mathbb{R} \,/\, \ln(t) > 0\}$

$D_3 = \{t \in \mathbb{R} \,|\, \ln(\ln(t)) > 0\}$

Détérmination de D_2 :

$t \in D_2 \Rightarrow 0 < \ln(t) \Rightarrow e^0 < e^{\ln t}$

$\Rightarrow 1 < t$

$D_2 =]1, +\infty[$

Détérmination de D_3 :

$t \in D_3 \Rightarrow 0 < \ln(\ln(t))$

$\Rightarrow e^0 < e^{\ln(\ln(t))}$

$\Rightarrow 1 < \ln(t)$

$\Rightarrow e^1 < e^{\ln(t)}$

$\Rightarrow e < t$

$D_3 =]e, +\infty[$

$D_{13} = D_1 \cap D_2 \cap D_3$

$=]0, +\infty[\cap]1, +\infty[\cap]e, +\infty[$

$$\boxed{D_{13} =]e, +\infty[}$$

$f_{14}(t) = |t|^t$.

Rappels :

$a^b = e^{\ln(a^b)} = e^{b \ln a}$

$f_{14}(t) = e^{t \ln(|t|)}$

$D_{14} = \{t \in \mathbb{R} \,|\, |t| > 0\}$

$= \{t \in \mathbb{R} \,|\, t \neq 0\}$

$$\boxed{D_{14} = \mathbb{R}^*}$$

$f_{15}(t) = \dfrac{1}{e^{2t} - 3e^t + 2}$

$D_{15} = \{t \in \mathbb{R} \,/\, e^{2t} - 3e^t + 2 \neq 0\}$

$e^{2t} - 3e^t + 2 = 0$

. Posons $x = e^t$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{3+1}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{3-1}{2} = 1$

$x_1 = e^{t_1} = 2$

$x_2 = e^{t_2} = 1$

$\ln(x_1) = \ln(e^{t_1}) = t_1 = \ln(2)$

$\ln(x_2) = \ln(e^{t_2}) = t_2 = \ln(1) = 0$

$$\boxed{D_{15} = \mathbb{R} / \{0, \ln(2)\}}$$

$D_{15} =]-\infty, 0[\cup]0, \ln(2)[\cup]\ln(2), +\infty[$

$\sqrt{1-t^2}$ $\quad \boxed{Df_{10} = \mathbb{R}}$

La fonction $\sqrt[n]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$

1- La fonction $\sqrt[2n+1]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}$

$D_f = \mathbb{R}$

car elle est composé de $t \to 1-t^2$ définie sur $\mathbb{R}$ et $t \to \sqrt[3]{t}$ définie sur $\mathbb{R}$ »

$f_{11}(t) = \ln\left(\frac{t^2+(1-\sqrt{2})t-\sqrt{2}}{t+1}\right)$

$Df_{11} = \left\{t \in \mathbb{R} \,/\, \frac{t^2+(1-\sqrt{2})t-\sqrt{2}}{t+1} > 0 \text{ et } t+1 \neq 0\right\}$

$t^2+(1-\sqrt{2})t-\sqrt{2} = (1-\sqrt{2})^2+4\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^2$

$t^2+(1+\sqrt{2})t-\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$ ou $t = -1$

t	$-\infty$	-1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$t^2+(1+\sqrt{2})t-\sqrt{2}$	+	0 −	0 +	
$t+1$	−	0 +	+	
$\frac{t^2+(1+\sqrt{2})t-\sqrt{2}}{t+1}$	−	‖ −	‖ +	

$\boxed{Df_{11} =]\sqrt{2}, +\infty[}$

Remarque :

$\sqrt[2n+1]{-x} = -\sqrt[2n+1]{x}$

$\sqrt[3]{-1} = -\sqrt[3]{1}$

$f(12) = \sqrt{-(t-1)^2}$

Rappels :
- $\forall t \in \mathbb{R} \ (t-1)^2 \geq 0$
- $a \leq b \leq a \Leftrightarrow a = b$

~~$(f_{15}(t) = \ln(\ln(\ln(t))))$~~

$f_{14}(t) = \sqrt{-(t-1)^2}$

$Df_{14} = \{t \in \mathbb{R} \,/\, -(t-1)^2 \geq 0\}$

$= \{t \in \mathbb{R} \,/\, (t-1)^2 \leq 0\}$

$= \{t \in \mathbb{R} \,/\, 0 \leq (t-1)^2 \leq 0\}$

$= \{t \in \mathbb{R} \,/\, (t-1)^2 = 0\}$

$= \{t \in \mathbb{R} \,/\, t = 1\}$

$= \{1\}$ → singleton

$f_5(t) = \sqrt{-t} + (3+t)^{-\frac{1}{2}}$

$Df_5 = \{t \in \mathbb{R} \mid -t \geq 0 \text{ et } t+3 > 0\}$

$= \{t \in \mathbb{R} \mid t \leq 0 \text{ et } t > -3\}$

$= \{t \in \mathbb{R} \mid t \leq 0\} \cap \{t \in \mathbb{R} \mid t > -3\}$

$=]-\infty, 0] \cap]-3, +\infty[$

$\boxed{Df_5 =]-3, 0]}$

Remarque :

$(t+3)^3 = (t+3)^2(t+3)$

on a $(t+3)^2$ est positive

donc le signe de $(t+3)^3$ est le signe de $(t+3)$

$f_6(t) = (t - |t|)^{-\frac{1}{2}}$

$Df_6 = \{t \in \mathbb{R} \mid t - |t| > 0\}$

$= \{t \in \mathbb{R} \mid t > |t|\}$

$t > |t|$ est impossible

$\forall t \in \mathbb{R} \quad |t| \ngtr t$

$\boxed{Df_6 = \varnothing}$

$f_7(t) = (|t| - t)^{-\frac{1}{2}}$

$Df_7 = \{t \in \mathbb{R} \mid |t| - t > 0\}$

$= \{t \in \mathbb{R} \mid |t| > t\}$

$|t| > t \iff t < 0$

$\boxed{Df_7 =]-\infty, 0[}$

$f_8(t) = \dfrac{\sqrt{t^2-3t+2}}{\sqrt{t^2-1}}$

$Df_8 = \{t \in \mathbb{R} \mid t^2-3t+2 \geq 0 \text{ et } t^2-1 > 0\}$

$\Delta_{t^2-3t+2} = 9 - 8 = 1$

$t^2-3t+2 = 0 \iff t = 2 \text{ ou } t = 1$

$t^2-1 = 0 \iff t = 1 \text{ ou } t = -1$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
t^2-3t+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_1 =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D_2 =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$D_8 = D_1 \cap D_2$

$\boxed{D_8 =]-\infty, -1[\cup [2, +\infty[}$

$f_9(t) = \sqrt{\dfrac{t+2}{t-2}}$

$Df_9 = \{t \in \mathbb{R} \mid \dfrac{t+2}{t-2} \geq 0 \text{ et } t-2 \neq 0\}$

t	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$t+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$t-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{t+2}{t-2}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$\boxed{Df_9 =]-\infty, -2] \cup]2, +\infty[}$

Scanné avec CamScanner

$3t+2 \geq 0$

$f_4(t) = \sqrt{\sqrt{t+3} - \sqrt{t} - 3}$

Rappels :

- Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$ $\quad a \geq b \iff a^2 \geq b^2$
- "et" $\iff$ $\cap$ Intersection
- "ou" $\iff$ $\cup$ Union
- $E \cup \varnothing = E$
- $E \cap \varnothing = \varnothing$

$D_{f_4} = \{ t \in \mathbb{R} \,/\, t+3 \geq 0 \text{ et } t \geq 0 \text{ et } \sqrt{t+3} - \sqrt{t} - 3 \geq 0 \}$

$D_{f_4} = D_1 \cap D_2 \cap D_3$

avec $D_1 = \{ t \in \mathbb{R} \,/\, t+3 \geq 0 \} = [-3 ; +\infty[$

$D_2 = \{ t \in \mathbb{R} \,/\, t \geq 0 \} = [0 ; +\infty[$

$D_3 = \{ t \in \mathbb{R} \,/\, \sqrt{t+3} - \sqrt{t} - 3 \geq 0 \}$

$t \in D_3 \iff \sqrt{t+3} - \sqrt{t} - 3 \geq 0$

$\iff \sqrt{t+3} \geq \sqrt{t} + 3$

$\iff \sqrt{t+3}^2 = t+3 \geq (\sqrt{t} + 3)^2 = t + 9 + 6\sqrt{t}$

$\iff \underline{-6 \geq 6\sqrt{t}}$ impossible

$\boxed{D_3 = \varnothing}$

$\boxed{D_{f_4} = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \varnothing}$