Suites et séries numériques

Issam Elhattab

École Nationale de Commerce et de Gestion - Casablanca
Université de Hassan II

2010 - 2011

Sommaire

Exemple introductif

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par : $u_n = \frac{1}{2^n}$. On sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique et que :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

D'autre part, on a : $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, d'où : $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = 1$. On écrit alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = 1.$$

Dans cette partie du cours, **nous cherchons à étendre** le nombre de cas où l'on peut donner un sens précis à ce symbole $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

Définitions

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. La série de terme general u_n, est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On note $\sum u_n$ la série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On appelle S_n sommes partielle d'indice n de la série $\sum u_n$.

Définition

La série $\sum u_n$ est dite **convergente** ssi la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Sinon on dit que **la série** $\sum u_n$ **diverge.**

Lorsque la série $\sum u_n$ converge, le nombre $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ s'appelle somme de la série $\sum u_n$, et se note $\sum_{k=0}^{\infty} u_n$.

Séries usuelles

1. La série de terme général $u_n = x^n, n \geq 0$, converge ssi $|x| < 1$, et

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}; \qquad \forall x \in]-1,1[.$$

2. La série de terme général $u_n = nx^{n-1}, n \geq 1$, converge ssi $|x| < 1$, et

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad \forall x \in]-1,1[.$$

3. La série de terme général $u_n = n(n-1)x^{n-2}, n \geq 2$, converge ssi $|x| < 1$, et

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}, \qquad \forall x \in]-1,1[.$$

Série de Riemann

Théorème

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}, n \geq 1$, est convergente ssi $\alpha > 1$.

Exemple

1. *La série de terme général* $u_n = \dfrac{1}{n}$ *(appelée série harmonique) est divergente, car sinon, raisonnons par l'absurde, posons* $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ *(fini) et donc* $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$, *ce qui implique que* $\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = 0$, *or*

   $$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$ *par*

   suite $\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) \geq \dfrac{1}{2}$, *ce qui est absurde.*

2. *La série de terme général* $u_n = \frac{1}{n^2}$, *est convergente.* (De plus, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Ce n'est pas facile à le démontrer. Hors programme.)

Série exponentielle

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de terme général $u_n = \frac{x^n}{n!}$, $n \geq 0$, est convergente, de somme e^x :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} =$$

Série exponentielle

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de terme général $u_n = \frac{x^n}{n!}$, $n \geq 0$, est convergente, de somme e^x :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

Série exponentielle

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de terme général $u_n = \frac{x^n}{n!}$, $n \geq 0$, est convergente, de somme e^x :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!} =$$

Série exponentielle

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de terme général $u_n = \frac{x^n}{n!}$, $n \geq 0$, est convergente, de somme e^x :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemple

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!} = e^{-2}.$$

Condition nécessaire de convergence

Condition nécessaire

Théorème

Si la série $\sum u_n$ *converge, alors* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Démonstration

Posons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ *et remarquons que :*

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k.$$

Exemple

La série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$, *diverge, car*

Condition nécessaire

Théorème

Si la série $\sum u_n$ *converge, alors* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Démonstration

Posons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ *et remarquons que :*

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k.$$

Exemple

La série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$, *diverge, car son terme général* $u_n = \frac{n}{n+1}$ *vérifie* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1 \neq 0$.

Conditions suffisantes de convergence.

Convergence de séries à termes positifs

Théorème

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, telles que :

1. $0 \leq u_n \leq v_n$, *on a alors* $\sum v_n$ *converge* $\Rightarrow \sum u_n$ *converge.*
2. $0 \leq u_n \leq v_n$, *on a alors* $\sum u_n$ *diverge* $\Rightarrow \sum v_n$ *diverge.*
3. $u_n \geq 0,\ v_n \geq 0$ *et* $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, *on a alors* $\sum v_n$ *converge* $\Leftrightarrow \sum u_n$ *converge.*
4. $u_n \geq 0,\ v_n \geq 0$ *et* $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$, *on a alors* $\sum v_n$ *converge* $\Rightarrow \sum u_n$ *converge.*

Exemple

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}$

Convergence de séries à termes positifs

Théorème

Soit (u_n) *et* (v_n) *deux suites, telles que :*

1. $0 \leq u_n \leq v_n$, *on a alors* $\sum v_n$ *converge* $\Rightarrow \sum u_n$ *converge.*
2. $0 \leq u_n \leq v_n$, *on a alors* $\sum u_n$ *diverge* $\Rightarrow \sum v_n$ *diverge.*
3. $u_n \geq 0,\ v_n \geq 0$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, *on a alors* $\sum v_n$ *converge* $\Leftrightarrow \sum u_n$ *converge.*
4. $u_n \geq 0,\ v_n \geq 0$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, *on a alors* $\sum v_n$ *converge* $\Rightarrow \sum u_n$ *converge.*

Exemple

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$

Convergence de séries à termes positifs

Théorème

Soit (u_n) *et* (v_n) *deux suites, telles que :*

1. $0 \leq u_n \leq v_n$, *on a alors* $\sum v_n$ *converge* $\Rightarrow \sum u_n$ *converge.*
2. $0 \leq u_n \leq v_n$, *on a alors* $\sum u_n$ *diverge* $\Rightarrow \sum v_n$ *diverge.*
3. $u_n \geq 0,\ v_n \geq 0$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, *on a alors* $\sum v_n$ *converge* $\Leftrightarrow \sum u_n$ *converge.*
4. $u_n \geq 0,\ v_n \geq 0$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$, *on a alors* $\sum v_n$ *converge* $\Rightarrow \sum u_n$ *converge.*

Exemple

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right)$

Convergence de séries à termes positifs

Théorème

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, telles que :

1. $0 \leq u_n \leq v_n$, *on a alors* $\sum v_n$ *converge* $\Rightarrow \sum u_n$ *converge.*
2. $0 \leq u_n \leq v_n$, *on a alors* $\sum u_n$ *diverge* $\Rightarrow \sum v_n$ *diverge.*
3. $u_n \geq 0,\ v_n \geq 0$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, *on a alors* $\sum v_n$ *converge* $\Leftrightarrow \sum u_n$ *converge.*
4. $u_n \geq 0,\ v_n \geq 0$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, *on a alors* $\sum v_n$ *converge* $\Rightarrow \sum u_n$ *converge.*

Exemple

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right) > \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n}.$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$

Convergence de séries à termes positifs

Théorème

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, telles que :

1. $0 \leq u_n \leq v_n$, *on a alors* $\sum v_n$ *converge* $\Rightarrow \sum u_n$ *converge.*
2. $0 \leq u_n \leq v_n$, *on a alors* $\sum u_n$ *diverge* $\Rightarrow \sum v_n$ *diverge.*
3. $u_n \geq 0,\ v_n \geq 0$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, *on a alors* $\sum v_n$ *converge* $\Leftrightarrow \sum u_n$ *converge.*
4. $u_n \geq 0,\ v_n \geq 0$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, *on a alors* $\sum v_n$ *converge* $\Rightarrow \sum u_n$ *converge.*

Exemple

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3} < \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right) > \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n}$.
3. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$, vu que $\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$.

Série à termes quelconques

Définition

On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème

Toute série absolument convergente est convergente.

Exemple : La série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}, n \geq 1$, avec $\alpha > 1$, est absolument convergente, donc convergente.

Attention ! La réciproque du théorème ci-dessus est fausse. La série harmonique alternée de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \geq 1$ n'est pas absolument convergente. Cependant elle converge. En effet, on a le théorème suivant.

Séries alternées

On appelle série alternée une série dont les termes sont alternativement positifs et négatifs :

$$\sum(-1)^n \times u_n,$$

où $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite de réels positifs, autrement, $\forall n \geq 0$ on a $u_n \geq 0$.

Théorème (Critère de Leibniz)

Une série alternée $\sum(-1)^{n-1} \times u_n$ est converge si les deux conditions suivantes sont satisfaites simultanément :

1. $u_n > u_{n+1}, \forall n \geq 1;$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$

Exemple

Soit la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ (appelée série harmonique alternée). On a $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}, \forall n \geq 1$ de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Par conséquent, la série $\sum u_n$ est convergente.

Règle de d'Alembert

Théorème (Règle de d'Alembert)

Soit la série $\sum u_n$*, telle que* $u_n > 0, \forall n \geq 0$*, et,* $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ *(*ℓ *fini ou infini). Si*

1. $\ell < 1$*, alors* $\sum u_n$ *converge ;*
2. $\ell > 1$*, alors* $\sum u_n$ *diverge ;*

Exemple

1. Soit la série de terme général $u_n = \frac{3}{n!}$. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1}, \forall n \geq 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. Par conséquent, la série $\sum u_n$ est convergente.
2. Soit la série de terme général $u_n = \frac{n!}{5^n}$. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{5}, \forall n \geq 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$. Par conséquent, la série $\sum u_n$ est divergente.
3. Soit la série de terme général $u_n = \frac{1}{2n(2n-3)}$. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n(2n-3)}{(2n+2)(2n-1)}, \forall n \geq 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Par conséquent, on ne peut pas conclure a priori. Cependant $\frac{1}{2n(2n-3)} \sim \frac{1}{n^2}$, donc $\sum u_n$ est convergente.