Mathématiques

Issam Elhattab

École Nationale de Commerce et de Gestion - Casablanca
Université Hassan II - Mohammedia

2011 - 2012

Sommaire

Définitions

Définition

Une fonction f, de domaine de définition D_f, est dite :

- paire si $\forall x \in D_f$, on a $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$;
- impaire si $\forall x \in D_f$, on a $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$;
- périodique si $\exists T > 0$ tq $\forall x \in D_f$, on a $x + T \in D_f$ et $f(x+T) = f(x)$
(la période T est le plus petit réel > 0 satisfaisant $f(x+T) = f(x)$) ;
- bornée sur $I \subseteq D_f$ si $\exists\, M \geq 0$ tq $\forall x \in I$, on ait $|f(x)| \leq M$;
- croissante sur $I \subseteq D_f$ si $\forall (x, x') \in I^2$, tq $x \leq x'$, on a $f(x) \leq f(x')$;
- décroissante sur $I \subseteq D_f$ si $\forall (x, x') \in I^2$, tq $x \leq x'$, on a $f(x) \geq f(x')$;
- monotone sur $I \subseteq D_f$ si elle est croissante ou décroissante sur I.

Limites

Définition

Soit f une fonction de domaine de définition D_f et soit x_0 un réel (pas nécessairement dans D_f). On dit que $f(x)$ tend vers une valeur ℓ_0, quand x tend vers x_0, si $f(x)$ devient aussi voisin de ℓ_0 que l'on veut dès que x est suffisamment voisin de x_0, ce qui se note :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_0.$$

Autrement dit, pour tout intervalle ouvert $\mathcal{V}(\ell_0)$ contenant ℓ_0, on peut trouver un intervalle ouvert $\mathcal{V}(x_0)$ contenant x_0, tel que $f(\mathcal{V}(x_0) \cap D_f) \subseteq \mathcal{V}(\ell_0)$. Formellement,

$$\forall \mathcal{V}(\ell_0), \exists \mathcal{V}(x_0), \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{V}(x_0) \cap D_f, \text{ on a } f(x) \in \mathcal{V}(\ell_0).$$

Exemple

1. *Soit x_0 l'abscisse du point d'équilibre d'un marché donné. Soit f la fonction de demande et g celle d'offre, on a donc :*

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - g(x)\big) = 0.$$

2.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^4 - x^3 - x - 2} = 0;$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

Remarque

Dans certaines situations, on s'intéresse aux limites lorsque x tend vers x_0 (supposé fini) en restant toujours du même côté de x, soit parce que la fonction n'est pas définie de l'autre côté, soit parce qu'elle ne se comporte pas de la même manière des deux côtés. On parle alors soit de la limite à droite, ce qu'on note

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_0 \quad \text{ou encore} \quad \lim_{x \to x_0, x > x_0} f(x) = \ell_0$$

soit de la limite à gauche, ce qu'on note

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_0,$$

Exemple

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

Continuité

Définition

- Une fonction f, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, est continue en un point x_0 de I si :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \quad \text{existe avec} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

- On dit que f est continue à droite en un point x_0 de I si :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad \text{existe avec} \quad \lim_{x \to x_0, x > x_0} f(x) = f(x_0).$$

- On dit que f est continue à gauche en un point x_0 de I si :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad \text{existe avec} \quad \lim_{x \to x_0, x < x_0} f(x) = f(x_0).$$

Théorèmes

Théorème (des valeurs intermédiaires)

Si f est continue sur un intervalle $[a,b]$, alors :

$$\forall\, v \in [f(a), f(b)],\ \exists\, u \in [a,b],\ \text{tq}, f(u) = v.$$

Corollaire (Théorème de Bolzano)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $u \in]a,b[$ tel que $f(u) = 0$.

Démonstration

Puisque $f(a)f(b) < 0$, nécessairement l'un des deux réels $f(a)$ et $f(b)$ est strictement positif et l'autre est strictement négatif. Supposons que $f(a) < 0 < f(b)$, par suite $0 \in [f(a), f(b)]$ et vu que f est continue donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = 0$.

On résume, on dit que : “une fonction continue ne peut changer de signe sans s'annuler.”

Théorèmes (suite)

Théorème

Si f est une fonction continue en un point a et g une fonction continue en $f(a)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue en a.

Application

Montrer que la fonction $f(x) = \frac{1}{x+1}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Théorème

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors f est bijective de I dans $f(I)$ ssi f est strictement monotone sur I.

Application

Montrer que la fonction $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$ est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Dérivées

Définition

- Une fonction f, définie au voisinage d'un point x_0, est dite dérivable en x_0 si :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ est finie.}$$

  Cette limite quand elle existe, est appelée dérivée de f au point x_0 et notée $f'(x_0)$.

- Une fonction f, définie au voisinage d'un point x_0, est dite dérivable à droite en x_0 si :

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ est finie.}$$

Définition

- On dira que f est dérivable sur $[a,b]$, si elle est dérivable en tout point de l'intervalle ouvert $]a,b[$, et, si elle est dérivable à droite en a et à gauche en b.
- Si la fonction dérivée f' est dérivable à son tour en tout point d'un intervalle ouvert, la fonction dérivée $(f')'$ est définie sur le même intervalle, notée f''. Elle nomme dérivée seconde de f. On peut ainsi définir de proche en proche, quand elle existe, la dérivée $n-$ième, ou d'ordre n ; qui se note $f^{(n)}$.

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. On a donc :

f	f'
$u+v$	$u'+v'$
λu où $\lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda u'$
uv	$u'v+uv'$
u/v où $v \neq 0$	$(u'v-uv')/v^2$

Dérivé d'une fonction composée

Soit f une fonction dérivable en a, et, g une fonction dérivable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a, et l'on a :

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a) = (g' \circ f)(a) \times f'(a).$$

Exemple

$$f(x) = \ln(3x^4 + 1).$$

Solution

Dérivée d'une fonction réciproque

Soit f une fonction strictement monotone et dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors la fonction réciproque est dérivable en tout point $y_0 \in f(I)$ tel que $f'(x_0) \neq 0$, où $y_0 = f(x_0)$, et l'on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Exemple

Solution

Théorème (Théorème de Rolle)

Soit a *et* b *deux réels (a<b) et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Supposons que* $f(a) = f(b)$ *et que* f *est dérivable sur* $]a, b[$. *Alors il existe au moins un point* $c \in]a, b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

Exemple

Solution

Théorème (des accroissements finis)

Si f est continue sur un intervalle $[a, b]$, et, dérivable sur $]a, b[$, alors :

$$\exists\, c \in]a, b[\qquad \text{tel que :} \qquad f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Exemple

Soit la fonction définie par $f(x) = x^5 - x$. Montrer qu'il existe $c \in]1, 2[$ tel que $f'(c) = 30$.

Théorème (Règle de l'Hôpital)

Soit f et g deux fonctions définies et dérivables sur un voisinage ouvert I de a. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ et $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = \ell (\ell \in \mathbb{R})$, alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Théorème (Règle de l'Hôpital)

Soit f et g deux fonctions définies et dérivables sur un voisinage ouvert I de a. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ et $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = \ell (\ell \in \mathbb{R})$, alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Exemple

Calculez la limite suivante :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{x^3-1}.$$

Solution

Applications des dérivés

Applications théoriques

1. Monotonie ;
2. Extremum ;
3. Courbure ;
4. Points d'inflexion ;
5. Formes indéterminées ;
6. Etude complète d'une fonction.

Applications économiques

1. Coût marginal ;
2. Revenu marginal ;
3. Profit en régime de monopole.

Monotonie

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, on a alors : f est croissante (resp. décroissante) sur I ssi $f' \geq 0$ (resp. $f \leq 0$) sur I.

Exemple

Soit la fonction $f(x) = x^2 + x - 5$, *on a :* $f'(x) = 2x + 1$. *Tracer le tableau de variation de* f.

Solution

Comme $f'(x) > 0$ *pour tout* $x > -1/2$, *et,* $f'(x) < 0$ *pour tout* $x < -1/2$, *par conséquent* f *est croissante sur* $]-1/2, +\infty[$ *et décroissante sur* $]-\infty, -1/2[$.

Courbure

définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est :

concave : si la tangente en tout $x \in I$ se situe au-dessus de la courbe.
Ex : $f(x) = -x^2$.

convexe : si la tangente en tout $x \in I$ se situe en-dessous de la courbe.
Ex : $f(x) = x^2$.

Proposition

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I. Si

1. $f'' < 0$ *sur I, alors f est concave sur I ;*
2. $f'' > 0$ *sur I, alors f est convexe sur I.*

Extremum

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f admet en $a \in I$ un :

maximum local : si $\exists\, \varepsilon > 0$ tq $\forall x \in I \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, on a $f(x) \leq f(a)$.
Ex :

minimum local : si $\exists\, \varepsilon > 0$ tq $\forall x \in I \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, on a $f(x) \geq f(a)$.
Ex :

maximum global : si $\forall x \in I$, on a $f(x) \leq f(a)$.
Ex :

minimum global : si $\forall x \in I$, on a $f(x) \geq f(a)$.
Ex :

Extremum (suite)

Proposition

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I. Si f admet un extremum local en $a \in I$, alors

$$f'(a) = 0.$$

Attention !

1. La réciproque est fausse, **i.e.**, on peut avoir $f'(a) = 0$ sans que a soit un extremum. Exemple : La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en plus $f'(x) = 3x^2$ pour tout x, d'où $f'(0) = 0$. Cependant f n'admet pas d'extremum en 0.
2. La condition de dérivabilité pour la proposition ci-dessus n'est pas nécessaire, **i.e.**, une fonction peut admettre en un point un extremum (local ou global) sans qu'elle soit dérivable en celui-ci.

Proposition

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I. Soit $a \in I$, tel que $f'(a) = 0$. Si

1. $f''(a) > 0$, *alors f admet un minimum local en a ;*
2. $f''(a) < 0$, *alors f admet un maximum local en a ;*
3. $f''(a) = 0$, *on ne peut rien dire (Il faut procéder autrement !).*