Mathématiques

Issam Elhattab

École Nationale de Commerce et de Gestion - Casablanca
Université de Hassan II

2010 - 2011

Sommaire

Fonction affine

Fonction affine

- Une fonction affine est définie par :

$$f(x) = ax + b.$$

Remarque

Deux problèmes envisageables pour une fonction affine :

- *Connaissant l'expression de* f, *représenter graphiquement* f.
- *Connaissant deux points de la courbe de* f, *trouver l'expression de* f.

Exemple

- *Soit* $f(x) = 2x + 1$. *Représenter graphiquement cette fonction.*
- *Sachant que la courbe de la fonction* $f(x) = ax + b$ *passe par les deux points* $(2, 3)$ *et* $(1, 2)$, *trouver* a *et* b.

Solution

Applications économiques I

Fonction de demande affine

En économie élémentaire, la fonction de demande est une fonction affine décroissante, c'est-à-dire que lorsque les prix augmentent, la quantité demandée diminue, et lorsque les prix diminuent, la quantité demandée augmente.

Exemple

La demande d'un actif financier est de 1000 unités si le prix est à 20 dollars, et, elle est à 2000 unités si le prix est à 15 dollars. Quelle est la quantité demandée si le prix est à 30 dollars ?

Solution

Applications économiques II

Fonction d'offre affine

La fonction d'offre est une fonction affine croissante, c'est-à-dire que lorsque les prix augmentent, la quantité offerte augmente, et lorsque les prix diminuent, la quantité offerte diminue.

Exemple

La quantité offerte d'une action d'une société cotée en bourse suit la fonction $f(x) = 2x + b$. *Sachant que la quantité offerte est de 500 unités si le prix est à 15 dollars, quelle est le prix de l'action si la quantité offerte est de 1000 unités ?*

Solution

Équilibre du marché

Équilibre du marché $\Leftrightarrow$ Quantité offerte = Quantité demandée.

Exemple

Trouver l'équilibre du marché pour les fonctions d'offre et de demande suivantes :

$$\begin{array}{lll} \textit{Demande} & : & f(x) = -3x + 5. \\ \textit{Offre} & : & g(x) = x + 4. \end{array}$$

Solution

Polynômes et fonctions rationnelles

Polynômes

Un polynôme de degré n est définie par :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

où $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, sont les coefficients du polynôme.

Fonctions rationnelles

Une fonction rationnelle est une fonction de la forme,

$$\frac{p(x)}{q(x)},$$

où p et q sont des polynômes non nuls.

Exemple

Trouver l'équilibre du marché pour les fonctions d'offre et de demande suivantes :

$$\begin{array}{lll} \textit{Demande} & : & f(x) = \frac{6}{x+1} + 3. \\ \textit{Offre} & : & g(x) = x + 5. \end{array}$$

Solution

Le point d'équilibre est le point qui a pour abscisse la solution positive (car x modélise le prix) de l'équation $f(x) = g(x)$ (s'elle existe). D'autant plus, la solution de l'équation $f(x) = g(x)$ doit être différente de -1, en effet, l'ensemble de définition de la fonction f est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On a donc :

$$\begin{array}{rcl} f(x) = g(x) & \Leftrightarrow & \frac{6}{x+1} + 3 = x + 5 \\ & \Leftrightarrow & \frac{6}{x+1} = x + 2 \\ & \Leftrightarrow & (x+1)(x+2) = 6 \quad (\text{car } x + 1 \neq 0) \\ & \Leftrightarrow & x^2 + 3x - 4 = 0 \end{array}$$

D'où $\Delta = 3^2 - 4 \times (-4) = 25$. Par suite $x_1 = -4$ et $x_2 = 1$. On retient la solution $x_2 = 1$ et on écarte la solution $x_2 = -4$ puisqu'elle est négative. Par conséquent, le point d'équilibre est le point $(1, f(1) = g(1) = 6)$.

Fonctions exponentielles et logarithmiques

Fonctions exponentielles

La fonction exponentielle est définie par :

$$f(x) = a^x,$$

où $a > 0$ et $a \neq 1$.

Fonctions logarithmiques

La fonction logarithmique est l'inverse de la fonction exponentielle a^x. Elle se note $\log_a(x)$, où $a > 0$, $a \neq 1$ et $x > 0$.

Applications économiques

Intérêt composé

Le principe du calcul est le suivant : supposons un capital C placé à un taux d'intérêt annuel r pendant n périodes ; les intérêts sont calculés à la fin de chaque période puis rajoutés au capital et produisent à leur tour des intérêts au même taux r dans les périodes ultérieures. Le prêteur reçoit (l'emprunteur paye) au terme de la $n^{\text{ième}}$ périodes le montant :

$$f(n) = C(1+r)^n.$$

Exemple

On place un capital $C = 1000$ dollars à un taux annuel de 5%. Calculer la valeur de C au bout de 10 ans.

Solution

Au bout de $n = 10$ périodes pour un taux $r = 5\%$ la valeur de C devient $f(n) = C(1+r)^n$, autrement, la valeur de C devient $1000(1+5\%)^{10} = 1628,9$ dollars.