Mathématiques

Issam Elhattab

École Nationale de Commerce et de Gestion - Casablanca
Université de Hassan II

2010 - 2011

Sommaire

Les ensembles

Les ensembles

Définition

- Un ensemble est une collection d'objets bien déterminés. On appelle ces objets les éléments de l'ensemble.
- Un ensemble est défini soit par une liste de ses éléments, soit par une propriété qui définit ses éléments.

Exemple

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ *: l'ensemble des entiers naturels.*
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ *: l'ensemble des entiers relatifs.*
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ *: l'ensemble des nombres rationnels.*
- $\mathbb{R}$ *: l'ensemble des nombres réels.*

Vocabulaires

$x \in A$: x appartient à A. Ex : $1 \in \mathbb{N}$.

$x \notin A$: x n'appartient pas à A. Ex : $-1 \notin \mathbb{N}$.

$A \subseteq B$: tous les éléments de A appartiennent à B.
Ex : $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}, \quad \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

$A \subset B$: tous les éléments de A sont dans B et il existe au moins un élément de B qui n'appartient pas à A. Ex : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

$A \not\subseteq B$: il existe au moins un élément de A n'est pas dans B.
Ex : $\{-2, 1\} \not\subseteq \mathbb{N}, \quad \mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$.

$A = B$: les ensembles A et B sont composés des mêmes éléments.
Ex : $\{$les faces paires d'un dé$\} = \{2, 4, 6\}$.

$\emptyset$: l'ensemble vide qui ne contient aucun élément.
Ex : $\{n : n$ est un entier impair multiple de $2\} = \emptyset$.

Opérations sur les ensembles

Opérations sur les ensembles

Considérons deux sous-ensembles A et B d'un ensemble Ω.

Réunion

La réunion de A et B est l'ensemble composé des éléments de A et des éléments de B. La reunion de A et B, notée $A \cup B$, qui se lit "A *union* B", est définie par : $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
Ex : $\{2,5,7\} \cup \{1,3,4,5\} = \{1,2,3,4,5,7\}$.

Intersection

L'intersection de A et B est l'ensemble composé des éléments communs de A et B. L'intersection de A et B, notée $A \cap B$, qui se lit "A *inter* B", est définie par : $A \cap B = \{x : x \in A \text{ et } x \in B\}$.
Ex : $\{3,5,7\} \cap \{1,3,4,5\} = \{3,5\}$.

Opérations sur les ensembles (suite)

La différence

La différence entre A et B est l'ensemble composé des éléments de B qui n'appartiennent pas à A. La différence entre A et B, notée $B \setminus A$, est définie par : $B \setminus A = \{x : x \in B \text{ et } x \notin A\}$.
Ex : $\{2, 3, 5, 7\} \setminus \{1, 3, 5\} = \{2, 7\}$.

Le complémentaire

Le complémentaire de A est l'ensemble composé des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A. Le complémentaire de A, noté $\overline{A}$, qui se lit "*complémentaire* de A", est défini par : $\overline{A} = \{x : x \in \Omega \text{ et } x \in A\}$.
Ex : Soit $\Omega = \mathbb{Z}$, $\overline{\{n : n = 2k, k \in \mathbb{Z}\}} = \{n : n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$.

Théorème

Soit A, B et C trois ensembles de Ω :

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Produit cartésien et cardinalité

Produit cartésien et cardinalité

Produit cartésien

On appelle produit cartésien de deux ensembles E et F, l'ensemble des couples ordonnés (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$. On le note $E \times F$ et on lit "E *croix* F". $E \times F = \{(x, y) : x \in E \text{ et } y \in F\}$.

Cardinalité

Un ensemble est dit fini s'il contient un nombre fini d'éléments. Le nombre d'éléments d'un ensemble s'appelle cardinal de l'ensemble. On le note $Card(E)$. Un ensemble qui n'est pas fini est dit infini.

Théorème

Soit E et F deux parties d'un ensemble fini Ω, alors :

1. $Card(E \cup F) + Card(E \cap F) = Card(E) + Card(F)$.
2. $Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$.

Exemple

Soit $E = \{3, 7\}$ et $F = \{1, 2, 5\}$, on a

- $E \times F = \{(3, 1), (3, 2), (3, 5), (7, 1), (7, 2), (7, 5)\}$.
- $E \times E = \{(3, 3), (3, 7), (7, 3), (7, 7)\}$.
- $Card(E) = 2, Card(F) = 3, Card(E \times F) = 6$.

Fonction

Fonction

Définition

Soit E et F deux ensembles donnés. Supposons qu'à chaque élément $x \in E$, on associe un et un seul élément $y \in F$. L'ensemble de ces associations définit une fonction ou application de E dans F, ce qu'on écrit :

$$\begin{aligned} f \ : \ & E \to F \\ & x \mapsto y = f(x). \end{aligned}$$

Remarque

À chaque fonction $f : E \to F$ correspond le sous-ensemble de $E \times F$ défini par :

$$\{(x, y) : x \in E \text{ et } y = f(x) \in F\}.$$

Exemple

Soit la fonction :

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f(x) = 2x + 3. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \times 1 + 3 = 5 \\ f(-1) &= 2 \times (-1) + 3 = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= 2 \times (x+h) + 3 - (2x+3) \\ &= 2x + 2h + 3 - 2x - 3 \\ &= 2h. \end{aligned}$$

Fonction (suite)

Vocabulaires

Soit la fonction $f : E \to F$. On dit que f est :

Injective : si les images de deux éléments distincts de E sont des éléments distincts de F.

Surjective : si chaque élément de F est une image d'un élément de E.

Bijective : si elle est à la fois injective et surjective.

Exemple

Soit les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & 2x, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} g : [0,2] & \longrightarrow & [0,4] \\ x & \longmapsto & x^2, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} h : [-2,2] & \longrightarrow & [0,4] \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array}$$

Sont-elles injectives, surjectives ou bijectives ?

Fonction inverse

Fonction inverse

Définition

Considérons la fonction $f : E \to F$. Si la fonction f est bijective, on peut associer à chaque élément $y \in F$ un et un seul élément $x \in E$, tel que $y = f(x)$. La fonction ainsi définie est dite fonction inverse de la fonction $f : E \to F$, on la désigne par $f^{-1} : F \to E$.

Exemple

Considérons la fonction :

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto f(x) = 2x + 3. \end{aligned}$$

On vérifie que la fonction f est inversible et que son inverse est la fonction :

$$\begin{aligned} f^{-1} \quad : \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & y \longmapsto f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y - 3). \end{aligned}$$