Recherche Opérationnelle

CHAPITRE I : Calcul Matriciel

• Opérations sur les matrices

1 : Transposition des matrices

$$A_{(3,2)}^{\,n\ p} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1}_{(2,3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

n : 3 lignes
p : 2 colonnes

2 : Somme des matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$$

3 : Multiplication des matrices

3.1. Deux matrices

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2\times 1)+(2\times 1) & -8+8 \\ (2\times 1)+(-2\times 1) & 8+8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5\times 2)+(1\times 0) & (5\times 1)+(1\times 2) \\ (2\times 2)+(0\times 0) & (2\times 1)+(0\times 2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

3.2. Nombre x matrice

$$2 \times \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$$

• Matrice carrée : $(n = p)$

a – Matrice triangulaire

① Mt sup $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ ② Mt inf $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

③ M. Diagonale $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

b – Matrice unité (I_n)

$$I_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c – Matrice symétrique $A = A^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} \text{ symétrique}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow -1 \times \overset{\text{transp}}{\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}} \text{ anti-symétrique}$$

• Déterminants des matrices det(A)

1. Calcul direct

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = (4\times 1) - (3\times 2)$$

2. Méthode de Sarrus

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\det(A) = (1\times 3\times 2 + 2\times 1\times 3 + 3\times 2\times 1) - (3\times 3\times 3 + 1\times 1\times 1 + 2\times 2\times 2)$$

$$\det(A) = 18 - 36 = -18$$

3. Méthode des cofacteurs

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \overset{p}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \overset{imp}{3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (3\times 2 - 1\times 1) - 2 \times (2\times 2 - 1\times 3) + 3 \times (2\times 1 - 3\times 3)$$

$$\det(A) = 5 - 2 - 21 = -18$$

Égalités :

- $\det(A) = \det(A')$
- $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$
- $\det(A\times B) = \det(A) \times \det(B)$
- $\det(\alpha A) = \alpha^n . \det(A)$

Cofacteurs (méthode juste)

$$\det(A) = 1 \times (-1)^{\overset{\text{lign colon}}{1+1}} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+2}$$

• Résolution des système (système Cramer)

$$\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ 3x + 2y + 3z = 11 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$A \times X = B$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Calculons det(A)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (-1)^2 \times (-7) + 1 \times (-1)^3 \times 3 + (-1)(-1)^4 \times 5$$

$$= -14 - 3 - 5$$

$$\boxed{\det(A) = -22} \neq 0$$

▸ Calcul de x, y et z

▸ Calcul x $\qquad x = \dfrac{Dx}{D}$

Dx : le déterminant de A en remplaçant la première colonne par le vecteur B.

$$Dx = \det \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 11 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -22$$

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{-22}{-22} = \boxed{1}$$

$$Dy = \det \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 11 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 22$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{22}{-22} = \boxed{-1}$$

$$Dz = \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 11 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -44$$

$$z = \frac{Dz}{D} = \frac{-44}{-22} = \boxed{2}$$

• Invertion des matrices.

- $A_{(n,n)}$ est inversible si det $\neq 0$.
- A_n^{-1} est l'inverse de A_n
- $\boxed{A_n^{-1} = \dfrac{\text{cofacteur}}{\det(A_n)}}$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = -18 \neq 0$$

$$\text{cof}\, A_n \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 1 & -7 \\ 1 & -7 & -5 \\ -7 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^{-1} = \frac{\text{Coef}\, A_n}{-18} =$$

• Polygone caractéristique

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\pi(A_2) = \det(A_2 - \lambda I_2)}$$

$$\pi(A_2) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda) - 2 \times 3$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda - 4 \qquad \Delta = 9 + 16 = 25$$

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -1 \qquad \lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 4$$

• Diagonalisation des matrices

$$D = P.A.P^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = P.A.P^{-1} \Rightarrow P.D = P.P.A.P^{-1}$$

$$\Rightarrow P.D.P^{-1} = P.A.P^{-1}$$

$$\Rightarrow A = P.D.P^{-1}$$

donc : $A^n = PDP^{-1} \times PDP^{-1} \times PDP^{-1}$

$$A^n = P.D^n.P^{-1}$$

$$\boxed{A^n = P.D^n.P^{-1}}$$

CHAPITRE II : Programmation Linéaire

• Formes d'un PL :

▶ **Forme canonique** ($\leqslant \geqslant$)

$$\text{Max } Z = 20x_1 + 30x_2 + 40x_3$$

sous $\begin{cases} \ldots\ldots \leqslant \ldots \\ \ldots\ldots \leqslant \ldots \\ \ldots\ldots \leqslant \ldots \end{cases}$ graphique

▶ **Forme standard** ($=$)

$$\text{Max } Z = 20x_1 + 30x_2 + 40x_3 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$$

sous $\begin{cases} \ldots\ldots + e_1 = \ldots \\ \ldots\ldots + e_2 = \ldots \\ \ldots\ldots + e_3 = \ldots \end{cases}$ matricielle (analytique)

▶ **Forme Mixte** ($= \geqslant \leqslant$)

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

sous $\begin{cases} \ldots\ldots \geqslant \ldots \\ \ldots\ldots \leqslant \ldots \\ \ldots\ldots = \ldots \end{cases}$

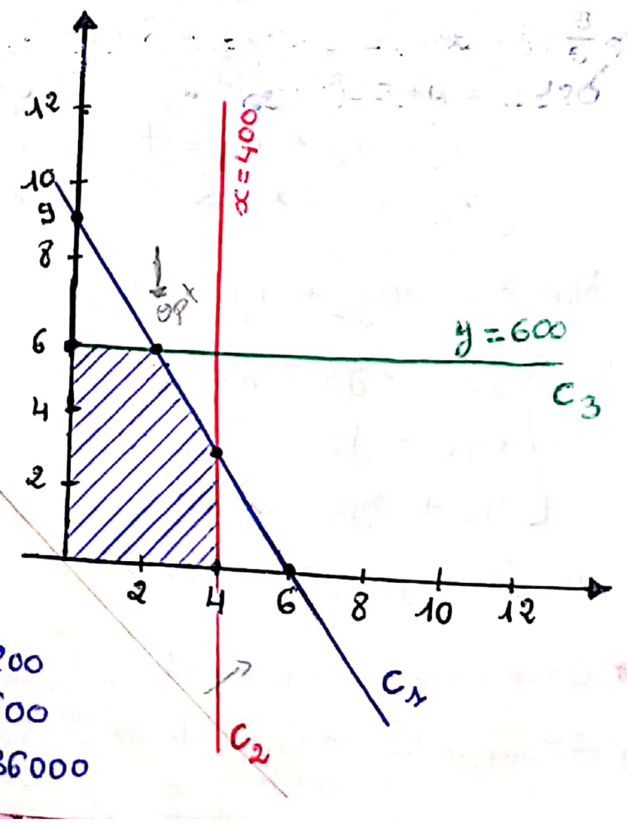
• Résolution d'un PL : le simplexe

▶ **Méthode graphique :**

$$\text{Max } Z = 30x + 50y$$

sous $\begin{aligned} 3x + 2y &\leqslant 1800 \\ x &\leqslant 400 \\ y &\leqslant 600 \end{aligned}$ CN.N : $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$

$3x + 2y = 1800 \Rightarrow x = 0,\ y = 900$; $\Rightarrow y = 0,\ x = 600$ } D_1



$x = 200$
$y = 600$
$Z = 36000$

▶ **Méthode algébrique**

$$\text{Max } Z = 30x + 50y$$

$$\begin{cases} 3x + 2y + e_1 = 1800 \\ x + e_2 = 400 \\ y + e_3 = 600 \end{cases}$$

à l'origine $O(0,0)$:

▶ $e_1 = 1800 - 3x - 2y$
▶ $e_2 = 400 - x$
▶ $e_3 = 600 - y$

1ère itération

- VE (Max (30, 50)) $\overset{\oplus}{50}$ y entre en base
- VS (Min de $\left(\frac{1800}{2}, \frac{400}{0}, \frac{600}{1}\right)$

$e_3 = 600 - y \Rightarrow \boxed{y = 600 - e_3}$

▶ $e_1 = 600 - 3x + 2e_3$
▶ $e_2 = 400 - x$
▶ $e_3 = 600 - y$
▶ $Z = 30000 + 30x - 50e_3$

Il reste un coefficient positif donc :

2ème itération

- VE (Max (−50, 30)) $\overset{\oplus}{30}$ x entre en base
- VS (Min de $\left(\frac{600}{3}, \frac{400}{1}, \frac{600}{0}\right) = 200$

$e_1 = 600 - 3x + 2e_3 \Rightarrow \boxed{x = 200 + \frac{2}{3}e_3 - \frac{e_1}{3}}$

▶ $x = 200 + \frac{2}{3}e_3 - \frac{e_1}{3}$
▶ $e_2 = 200 - \frac{2}{3}e_3 + \frac{e_1}{3}$
▶ $y = 600 - e_3$
▶ $Z = 36000 - 30e_3 - 10e_1$

Tous les coefficients sont négatifs donc cette base est optimale.

L'optimum est : $Z = 36\,000$; $x = 200$; $y = 600$; $e_2 = 200$.

▶ **Méthode des tableaux** (pivot)

- la ligne pivot est divisée par par pivot
- pivot correspond au plus grand Z et plus petite c (e_i)
- la ligne (colonne) de la valeur entrante dievient la colonne de la valeur sortante (x, y)
- Première colonne $\left(3 - 0 \times \frac{2}{1}\right)$ $\begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$

- **Méthode de résolution du Symplexe par Excel.**

1. Activer l'extension "Solveur" au niveau d'Excel
2. Construire le tableau des deux variables, le tableau des contraintes et le tableau représentant la fonction économique Z.
3. Ouvrir "Paramètres du solveur" et déterminer l'objectif à définir, le type d'équation (Max ou Min), les cellules variables et ajouter les contraintes dans le champ correspondant.
4. Sélectionner une résolution de type "Simplex PL" et clicker sur "Résoudre".
5. Une fois terminé, une nouvelle feuille Excel s'affiche sous le nom "Rapport de solution 1" contenant 3 tableaux.
   - le tableau de la cellule objectif (Max)
   - le tableau des cellules variable (x_1, x_2)
   - le tableau de contraintes (C_1, C_2, C_3)

   Chaque tableau contient la valeur initiale avant l'exécution et la valeur finale après l'exécution.

- **Programme LINDO 6.1 :**

LINDO : Linear, Interactive, and Discrete Optimizer.

- **En cas du mauvais choix de pivot :**

- On risque à avoir effectuer un tableau supplémentaire pour résoudre le programme.

- **Cas particuliers du pivot :**

	x_1	x_2	e_1	e_2	B	$\frac{B}{\text{colonne}}$
e_1	1	2	1	0	14	$\frac{14}{2}=7$
e_2	4	3	0	1	21	$\frac{21}{3}=7$
Z	10	19	0	0	0	0

colonne du pivot correspondante au plus grand Z.

- $1+2+1+0=4 \quad \blacktriangleright \frac{4}{P}=\frac{4}{2}=2$
- $4+3+0+1=8 \quad \blacktriangleright \frac{8}{P}=\frac{8}{3}=2{,}66$

Donc $\boxed{\text{pivot}=3}$

	x_1	x_2	e_1	e_2	B
e_1	1	1	1	0	7
e_2	2	1	0	1	9
Z	12	12	0	0	0

- Pour x_1 : $\frac{7}{1}=7$ et $\frac{9}{2}=4{,}5$ donc $\boxed{2}$
- Pour x_2 : $\frac{7}{1}=7$ et $\frac{9}{1}=9$ donc $\boxed{1}$

donc $\boxed{\text{Pivot}=1}$

- **Dualité d'un PL sous forme mixte**

$$\text{Max } Z = 3x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$\text{sc : } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_3 \leq 8 \end{cases} \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

$$\text{Min } Z = 10y_1 + 7y_2 + 8y_3$$

$$\text{sc : } \begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3 \\ 2y_1 - y_2 \geq 1 \\ y_2 + 3y_3 \geq -2 \end{cases}$$

$$y_1 \leq 0,\ y_2 \gtrless 0,\ y_3 \geq 0$$

- On se base sur x_1, x_2 et x_3 (on inverse uniq. =)
- On inverse tous les opérateurs

Scanné avec CamScanner