Cours de probabilités

GHIZLAN LOUMRHARI

SEPTEMBRE 2023

R^2

Tables des matières

Plan du cours

La probabilité qu'est ce que c'est ?

- Une probabilité est souvent ramené à un calcul mathématique qui définie, la probabilité (ou la chance) qu'un **événement** donné se produisent.
- Une expérience est **aléatoire** lorsqu'elle a plusieurs résultats ou issues et que l'on ne peut pas prévoir, à priori quel résultat se produira.
- L'ensemble des issues d'une expérience s'appelle **l'univers**

La probabilité est une fonction permettant à mesurer la chance de réalisation d'un évènement

Probabilité : notions de base

L’univers

- **L’univers :** c’est l’ensemble des éventualités

Quand on veut étudier un phénomène aléatoire, on va commencer par définir ses limites. **Qu'est-ce qu'on étudie et quelles sont les situations possibles ?** C'est la première chose à faire.

Probabilité : notions de base

L'univers

- **L'univers :** c'est l'ensemble des éventualités
- Par exemple si on lance un dé, il n'y a que 6 résultats possibles, un par face. C'est ce qu'on va appeler des éventualités (les issues)
- **L'ensemble de ces éventualités est appelé l'univers**. Et on le note très souvent **Ω**. Par exemple, dans le cas du dé, **Ω**$=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- **Ω** est donc l'**ensemble des résultats possibles** que l'on considère pour l'étude.

Probabilité : notions de base

Evénement

❑ **Événement :** Une partie ou sous ensemble de **Ω**

Etudier les phénomènes qui peuvent survenir dans le cadre imposé par l'univers. On va donc s'intéresser à des évènements qui peuvent se produire.

1. **événement élémentaire**

Un événement est peut être composé d'une seule issus (éventualité) : Par exemple, l'évènement **"Obtenir un 3"** en lançant un dé c'est un événement élémentaire.

Probabilité : notions de base

Evénement

Précision :

Attention de ne pas confondre événement élémentaire et issue.

Une issues appartient à **Ω**, alors qu'un événement (élémentaire ou non) est contenu dans **Ω**.

Probabilité : notions de base

Evénement

2. **événement général :**

- Un événement est être composé de plusieurs issus : Par exemple, **"Obtenir un chiffre strictement plus petit que 4"** au lancer de dé ne correspond pas à une seule éventualité mais à 3 éventualités.
- Plus généralement, **un évènement est donc une partie de l'univers**. Pour faciliter son usage en maths, on le notera presque toujours avec une lettre et parfois on y ajoutera un indice.

Probabilité : notions de base

Evénement

3. Évènement contraire : le reste de l'univers.

l'évènement contraire d'un certain évènement A. Il correspond au "reste de l'univers" une fois qu'on le retire A. Pour que le lien avec l'évènement A soit clair, **on le notera** $\bar{A}$.

Exemple : si on note Q : « l'évènement : Obtenir un chiffre strictement plus petit que 4 » . Alors $\bar{Q}$ est « l'évènement : Obtenir un chiffre plus grand ou égal à 4 », c'est à dire 4, 5 ou 6.

Probabilité : notions de base

Evénement

- **Expérience aléatoire :** expérience dont le résultat ne peut pas être déterminé avec certitude a priori.

Le principe fondamental de l'expérimentation dans les domaines des sciences exactes confirme que Si des expériences sont répétées dans des conditions pratiquement identiques, elles conduisent à des résultats qui sont essentiellement les mêmes

Probabilité : notions de base
Expérience aléatoires

Exemple. Chaque étudiant lance 100 fois un dé à six faces et note les résultats d'apparition de chaque face dans le tableau suivant :

Faces	1	2	3	4	5	6	Total
Effectif	20	14	10	22	16	18	100

On regroupe ensuite l'ensemble des résultats de la classe dans un même tableau puis on calcule les fréquences d'apparition de chaque face :

Faces	1	2	3	4	5	6	Total
Effectif	434	456	443	459	435	473	2700
Fréquences	16,1%	16,9%	16,4%	17%	16,1%	17,5%	100

Probabilité : notions de base

Le concept de probabilité

Une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1 : 0 signifie que l'événement n'arriveras jamais et 1 que l'événement arrivera à coup sur.

- Si nous somme sûrs ou certains qu'un événement sera réaliser : on dit que sa probabilité est de 100% ou 1.
- Si nous sommes sûrs qu'un événement ne pourra pas se réaliser : on dit que sa probabilité est 0.
- Si, par exemple, la probabilité est ¼ : on dit qu'il y a 25% de chances qu'il soit réalisé et 75% de chances qu'il ne le soit pas.

Probabilité : notions de base

La probabilité d'un événement

Pourquoi les probabilités sont toujours entre 0 et 1 ?

Dans des cas simples comme celui du lancer de dé, on vois naturellement qu'il va y avoir 1 chance sur 6 de tomber sur le 2 par exemple. Et 1/6 est bien compris entre 0 et 1.

Probabilité : notions de base

La probabilité d'un événement

- Alors que si on nous demande les chances de tomber sur un 8 (0 chance) : **la probabilité d'un évènement impossible est 0.**
- A l'opposé, si on nous demande les chances de tomber sur 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 quand on lance un dé, il y a 6 chances sur 6. Et 6/6 ça vaut 1 : **la probabilité d'un évènement certain est 1**
- On remarque donc que les 2 évènements les plus extrêmes ont des probabilités de 0 (ça n'arrivera jamais) et 1 (ça arrivera toujours), tous les autres évènements auront donc des probabilités comprises en 0 et 1.

Probabilité : notions de base

- Les probabilités peuvent êtres exprimées en pourcentage **quand c'est plus parlant (**qu'un pourcentage compris en 0% et 100% est bien qu'un nombre entre 0 et 1).
- Plus la probabilité d'un évènement sera proche de 1 (ou de 100%) plus il y aura de chances que cet évènement se produise. Par exemple, un évènement qui a une probabilité de 0,2 a 20% de chances de se réaliser alors qu'un évènement de probabilité 0,9 à 90% de chances de se produire.

Les probabilités à quoi ça sert ?

- Dans le monde qui nous entoure, il existe de très nombreux phénomènes pour lesquels l'aléatoire joue un rôle important.
- Certains sont naturels comme la météo, la localisation des tremblements de terre, etc.
- D'autres sont issus nos créations comme les jeux de hasard, les risques d'avoir un accident de voiture ou de tomber sur un correcteur ultra sévère le jour du correction , etc.
- En étudiant mathématiquement le côté ***aléatoire*** de ces phénomènes, on peut en tirer des caractéristiques globales pour avoir une meilleure idée de leur comportement. Voire même pour essayer de les prédire précisément.

Probabilité : notions de base

Loi de Probabilité

La **loi de probabilité :** C'est simplement **ce qui relie les évènements et leurs probabilités.**

Pour définir une loi de probabilité, il suffit donc d'associer à chaque évènement élémentaire sa probabilité.

- Si on note Ai les évènements élémentaires (autrement dit $\Omega=\{A1,A2,A3,...\}$) on définit la loi de probabilité de cette expérience aléatoire en associant une probabilité pi à chaque Ai.
- Pour que cette loi de probabilités soit valide, il faut respecter les conditions $0 \leq pi \leq 1$, $\forall i \in N$ et $p1+p2+p3+...=1$.

Probabilité : notions de base

Loi de Probabilité

Par exemple dans le cas d'un univers avec un nombre fini d'évènements élémentaires, il suffit de mettre tout ça dans un tableau.

La loi de probabilité du lancer d'un dé équilibré à 6 faces est donnée par ce tableau.

Face du dé	1	2	3	4	5	6
Probabilité	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Chapitre 1

ENSEMBLES ET PROBABILITÉS

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

1. notions d'ensemble

La notion d'ensemble est à la base des probabilités et de la statistique, voire des mathématiques en général. Un ensemble peut être considéré comme une collection d'objets, appelés membres ou éléments. De façon générale, nous désignerons un ensemble par une majuscule, par exemple A, B, C, et l'un de ses éléments par une lettre minuscule, a, b, c.

- Si un élément a appartient à l'ensemble C, nous écrirons $a \in C$;
- si a n'appartient pas à C, nous noterons $a \notin C$.
- Si deux éléments a et b appartiennent à l'ensemble C, cela sera noté : $a, b \in C$

Pour qu'un ensemble soit bien défini, nous devrons être en mesure de spécifier l'appartenance ou la non appartenance d'un objet particulier à cet ensemble.

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

1. notions d'ensemble

- Un ensemble peut être défini soit par un dénombrement de tous ses éléments soit, quand cela n'est pas possible, on décrivant une propriété de tous ses éléments.

Exemple 1. L'ensemble des voyelles de la langue française peut être défini soit par :

- Dénombrement : {a,e,i,o,u,y}
- L'indication de propriété sous l'écriture $\{x \backslash x \text{ est une voyelle}\}$ qui se lit : l'ensemble de tous les éléments x tels que x est une voyelle.

- **Exemple 2.** L'ensemble $\{x \backslash x \text{ est un triangle dans un plan}\}$ est l'ensemble de tous les triangles d'un plan. Remarquons que la méthode de dénombrement ne peut être utilisée ici.

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

2. Sous ensembles

- Si chacun des éléments d'un ensemble A appartient également à un ensemble B, nous dirons que A est un sous ensemble de B. cette propriété sera notée : $A \sqsubset B$ ou $B \sqsupset A$ et lue : A est inclus dans B ou B contient A. il en résulte que pour tous les ensembles A, $A \sqsubset A$.
- Si $A \sqsubset B$ et $B \sqsubset A$, nous dirons que A et B sont identiques et nous noterons A=B. dans ce cas A et B contiendront exactement les mêmes éléments.
- Si A et B ne sont pas identiques, c'est-à-dire s'ils ne contiennent pas exactement les mêmes éléments, nous écrivons $A \neq B$.
- Si $A \sqsubset B$ et $A \neq B$, A sera dit **un sous ensemble propre de B**.

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

2. Sous ensembles

Exemple 1. $\{a, i, u\}$ est un sous ensemble propre de $\{a, e, i, o, u\}$.

Exemple 2. $\{i, o, a, u, e\}$ un sous ensemble (mais pas un sous ensemble propre) de $\{a, e, i, o, u\}$ parce que les deux ensembles sont identiques.

Remarque : un simple réarrangement des éléments ne change pas l'ensemble.

Exemple 3. Au cours du jet d'un dé, les résultats possibles tels que le nombre obtenu soit pair appartiennent à l'ensemble $\{2,4,6\}$, sous ensemble de l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}$ de tous les résultats possibles.

Le théorème ci-dessous est vrai pour tout groupe d'ensemble A,B,C

Théorème 1. Si $A \sqsubset B$ et $B \sqsubset C$, alors $A \sqsubset C$

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

3. Ensemble vide

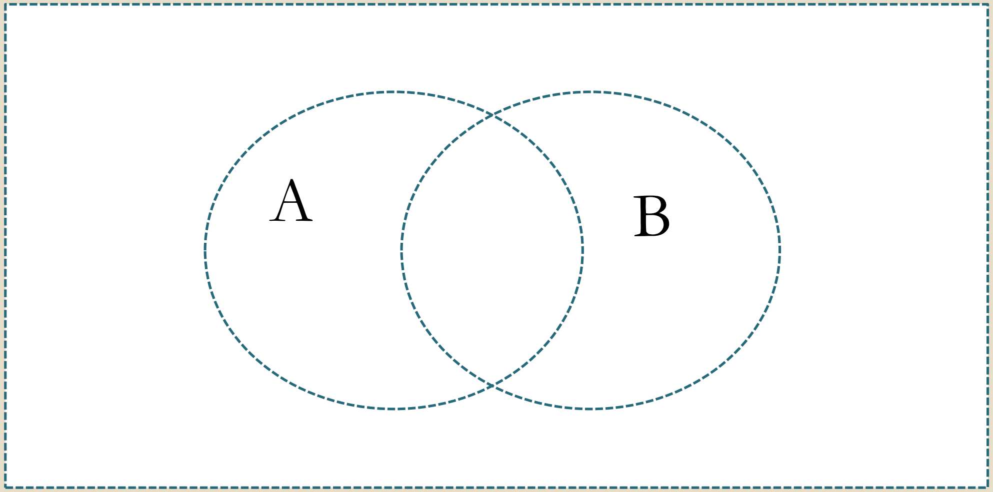
- Il est souvent commode d'introduire un ensemble qui ne comporte aucun élément. Un tel ensemble est dit ensemble vide et noté $\emptyset$. L'ensemble vide est sous ensemble de tout ensemble.

Exemple. Si nous jetons un dé, l'ensemble constitué par les résultats 7 et 11 est l'ensemble vide.

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

4. Opérations sur les ensembles

Union. L'ensemble de tous les éléments (ou points) qui appartiennent à A ou à B, soit aux deux est appelé union de A et B et noté $A \cup B$



Soit w le résultat de l'expérience : $A \cup B = \{w \in \Omega, w \in A\ ou\ w \in B\}$

$A \cup B$ se réalise ssi A se réalise ou B se réalise : A ou B

Union.

Exemple.

E={1,2,3,4,5,6,…, 25} ;

A={3,6,9,12,15,18,21,24} ;

B={5,10,15,20,25}

$$A \cup B = \{3,5,6,9,10,12,15,18,20,21,24,25\}$$

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

4. Opérations sur les ensembles

Intersection. L'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à la fois A et à B est appelé intersection de A et B, noté $A \cap B$.

L'intersection (∩) de deux ensembles A et B s'exprime ainsi :

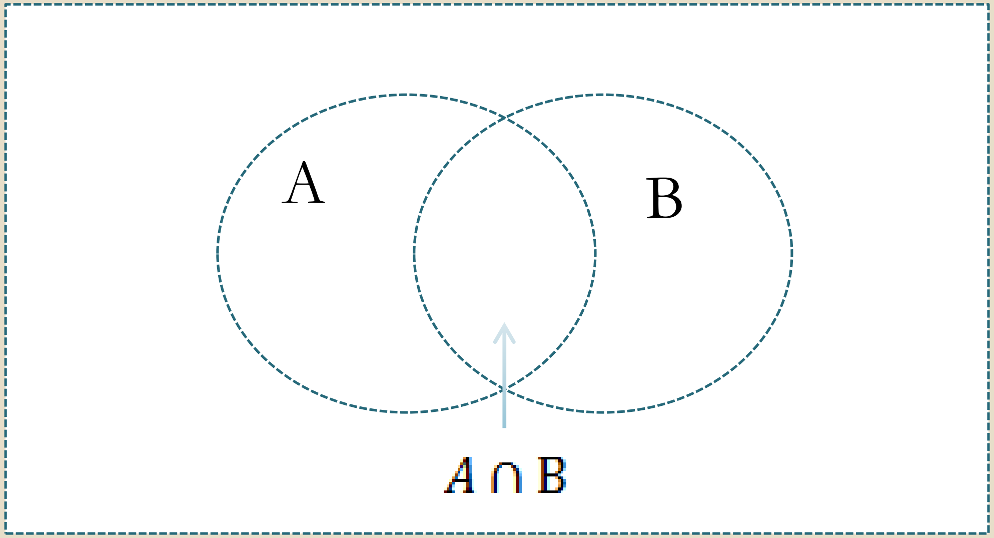
$$A \cap B = \{w \in \Omega \backslash \mathrm{w} \in A \; et \; w \; \in B\}$$

$A \cap B$ se réalise ssi A et B se réalisent : A et B

4. Opérations sur les ensembles

Intersection. L'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à la fois A et à B est appelé intersection de A et B, noté $A \cap B$.

Deux ensembles A et B tels que $A \cap B = \emptyset$, c'est-à-dire qui ne possèdent aucun des éléments en commun, sont appelés ensembles disjoints.



4. Opérations sur les ensembles

Exemple. On lance simultanément deux dés (un jaune et rouge) à 6 faces. Soit les événements suivants :

A : « la somme des points obtenus est égale à 12 »

B : « la somme des points obtenus est égale à 3 »

C : « le dé jaune s'arrête sur la face 1 »

Calculer : P(A), P(B), P(C) et P(B∩C) ?

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

4. Opérations sur les ensembles

A : « la somme des points obtenus est égale à 12 »

$$P(A) = \frac{1}{36}$$

B : « la somme des points obtenus est égale à 3 »

$$P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

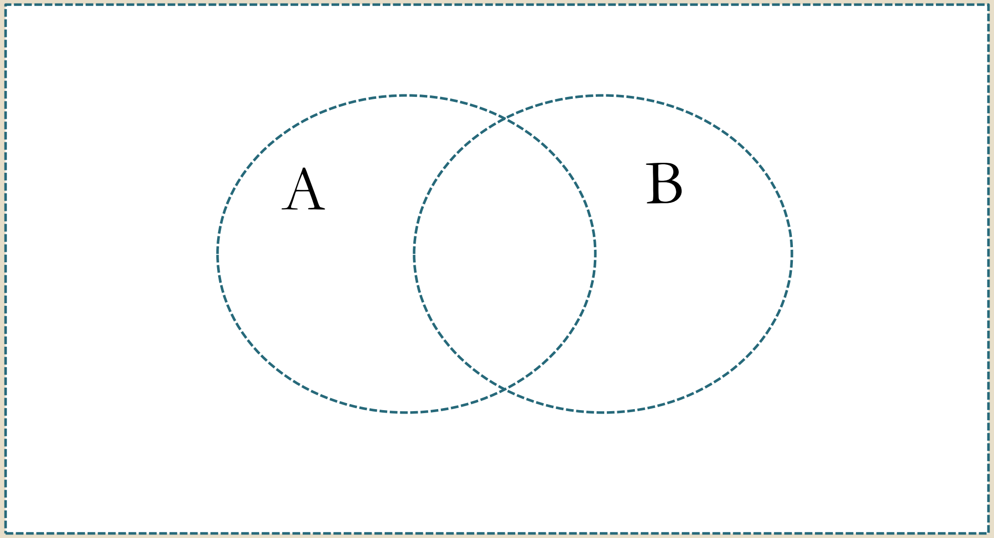
C : « le dé jaune s'arrête sur la face 1 »

$$P(C) = \frac{1}{6}$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{36}$$

4. Opérations sur les ensembles

Différence. L'ensemble de tous les éléments de A qui n'appartiennent pas à B est appelé différence de A et B, noté A-B

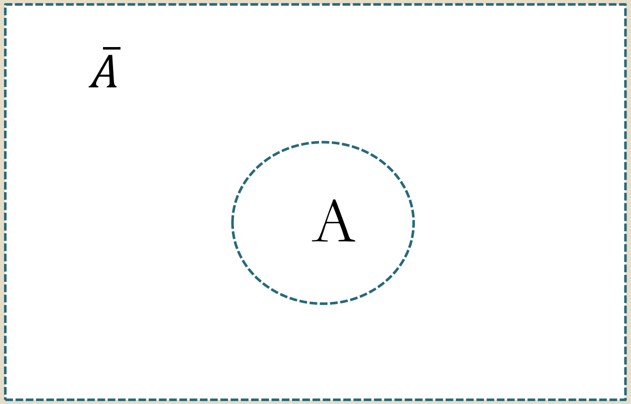


Chapitre 1. Ensembles et probabilités

4. Opérations sur les ensembles

Complémentaire. Evénement constitué des résultats élémentaires de **Ω** qui ne sont pas dans A. Soit *w* le résultat de l'expérience :

Ω



$$A = \{w \in \Omega, w \notin A\}$$

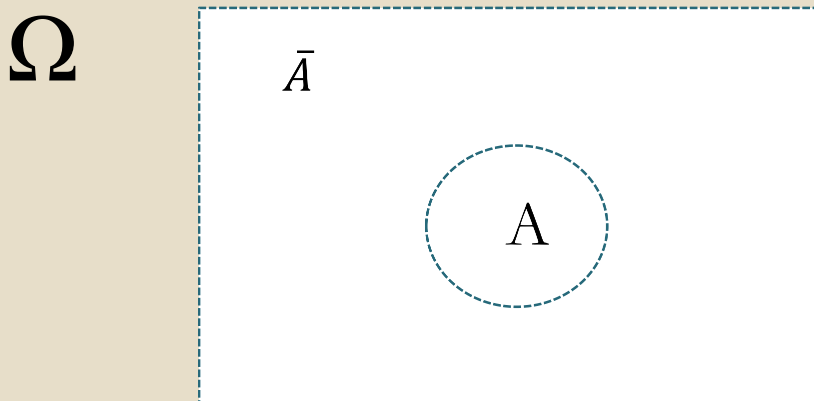
$\bar{A}$ se réalise ssi A ne se réalise pas : non A

4. Opérations sur les ensembles

Complémentaire.

Exemple.

Si N={0,1,2,3,4,5,6,…} ; A={0,2,4,6,…} ; $\bar{A} = \{1,3,5,7,\ldots\}$



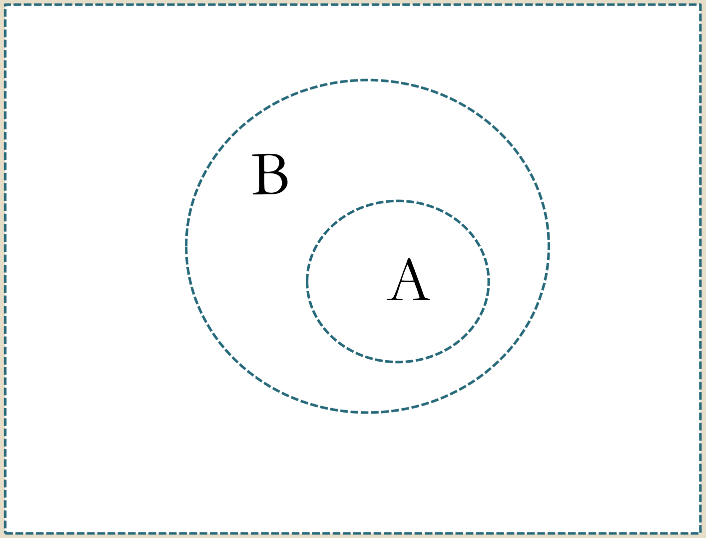
$$A = \{w \in \Omega, w \notin A\}$$

Tapez une équation ici.

4. Opérations sur les ensembles

Relations particulières :

1. Inclusions : A est inclus dans B ssi tout élément de A appartient à B :



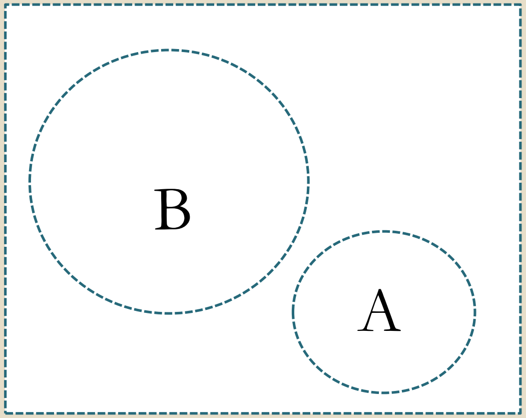
$$\boldsymbol{A \subset B \leftrightarrow (x \in A \longrightarrow w \in B)}$$

Si A est réalisé alors B est réalisé

4. Opérations sur les ensembles

Relations particulières :

2. Disjonction ou incompatibilité : A et B sont disjoints ssi A et B n'ont pas d'éléments communs :



$$A \; et \; B \; disjoints \leftrightarrow (A \cap B = \emptyset)$$

(A et B disjoints : A et B sont incompatibles)

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

4. Le diagramme de VENN

Définition : les diagrammes de Venn (appelés aussi diagrammes d'ensembles ou diagrammes logiques), ils utilisent des cercles ou d'autres formes entrecroisées pour illustrer les relations logiques entre deux ensembles d'éléments ou plus.

Ils sont utilisés pour décrire et analyser la façon dont des éléments sont liés les uns aux autres au sein d'un univers

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

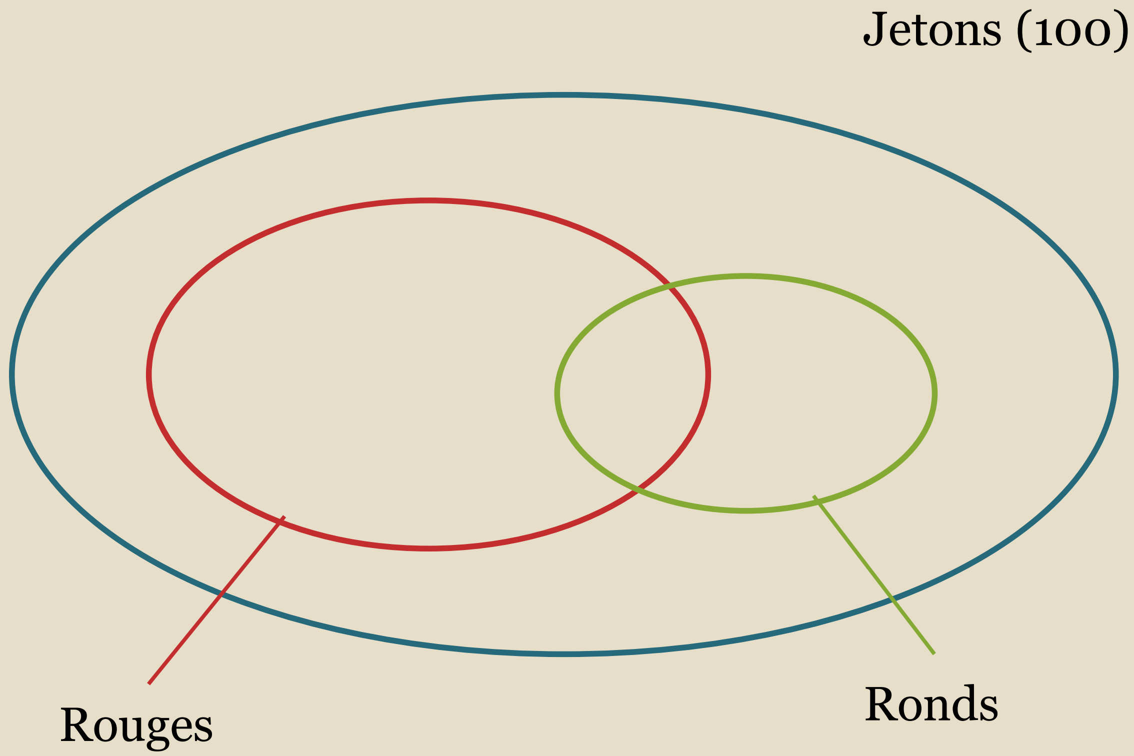
4. Le diagramme de VENN

Exemple. Un sac contient 100 jetons. Il y a 70 jetons rouge, 40 jetons ronds et 15 jetons rouge et ronds.

1. Combien y-a-t-il de jetons rouges mais pas ronds ?
2. Combien y-a-t-il de jetons ronds mais pas rouges ?
3. Combien y-a-t-il de jetons ni ronds ni rouges ?

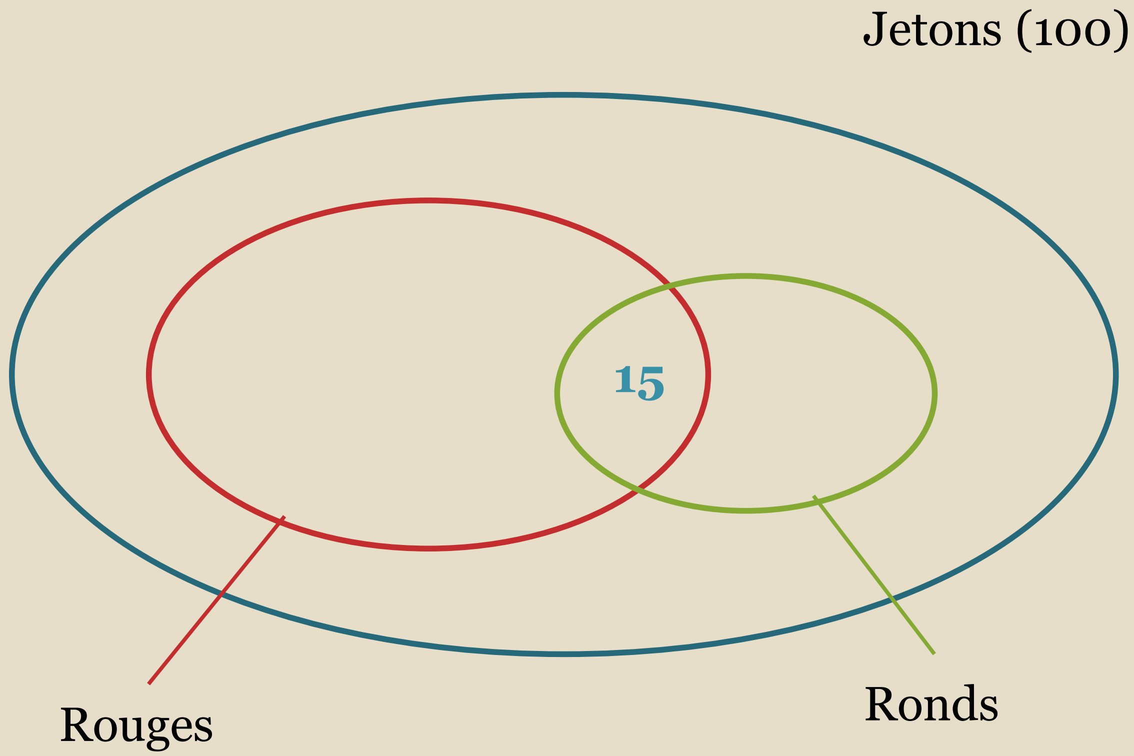
Chapitre 1. Ensembles et probabilités

4. Le diagramme de VENN



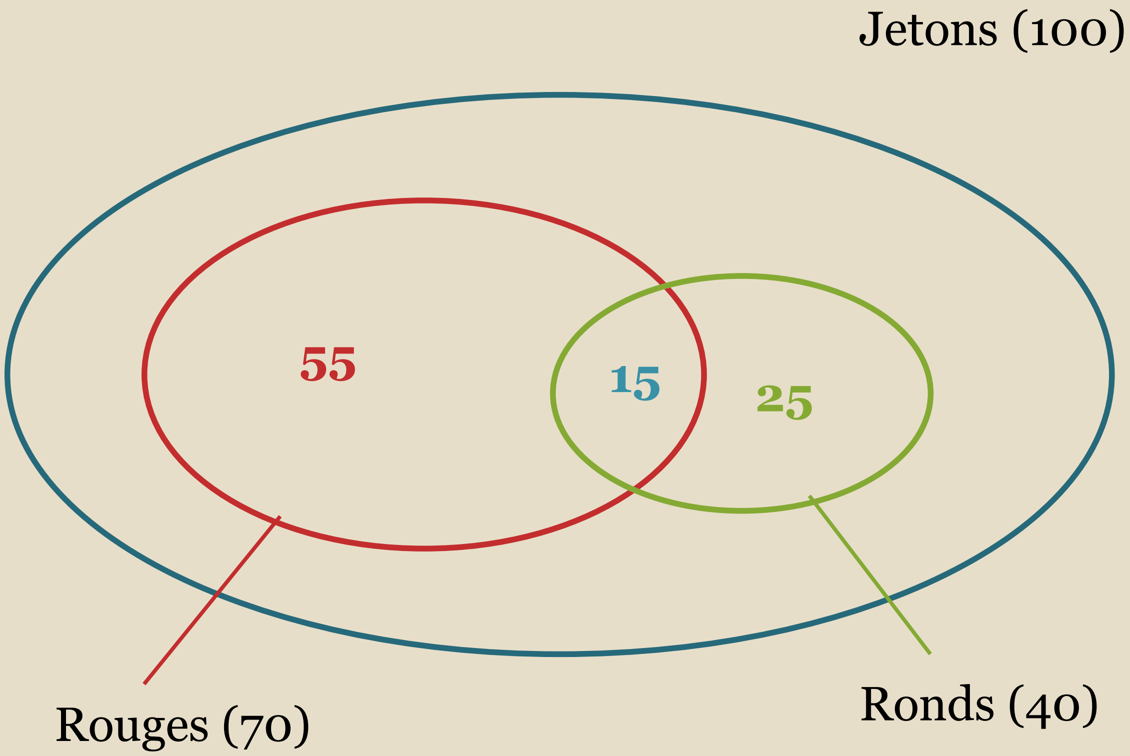
Chapitre 1. Ensembles et probabilités

4. Le diagramme de VENN



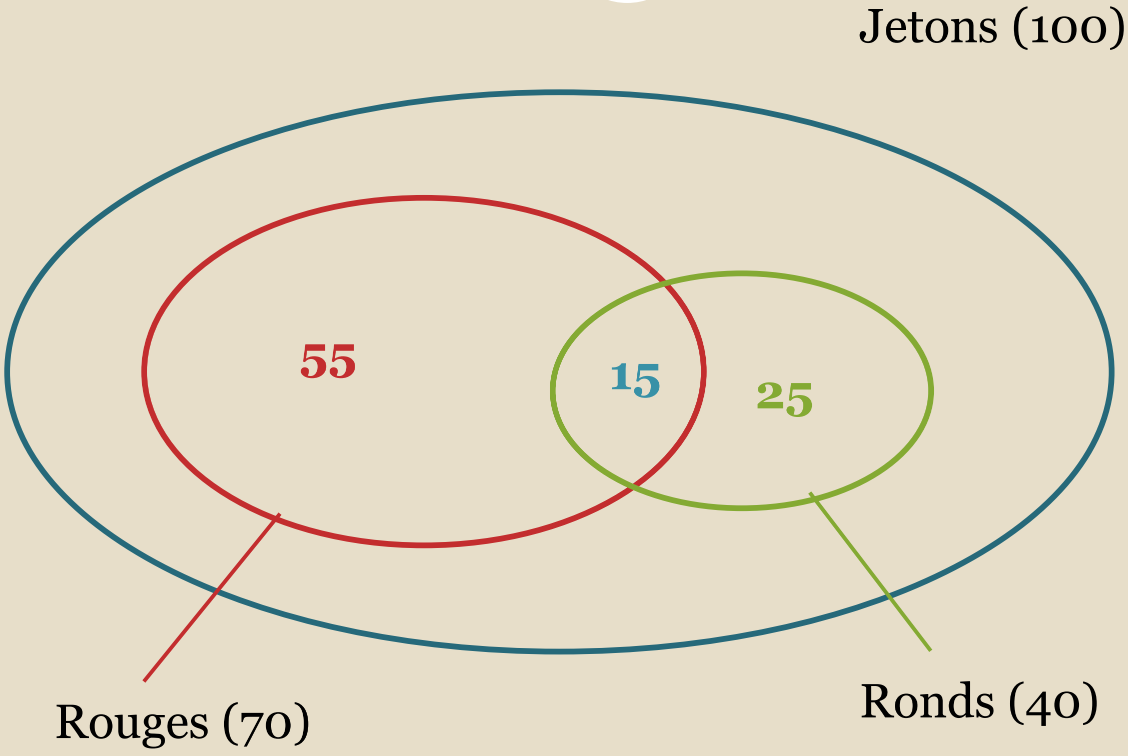
Chapitre 1. Ensembles et probabilités

4. Le diagramme de VENN



Chapitre 1. Ensembles et probabilités

4. Le diagramme de VENN



le nombre des jetons ni ronds ni rouges correspond à la zone extérieur : 100-(55+15+25)= 100-95 = 5

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

5. Quelques théorèmes relatifs aux ensembles

Propriétés :

1. Soit A et B deux ensembles. Les relations d'unions et d'intersections sont commutatives, c'est-à-dire :

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

2. Soit A, B et C trois ensembles. Les relations d'unions et d'intersections sont associatives, c'est-à-dire :

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

$$(A \cap B) \cap C = A \sqcap (B \sqcap C) = A \sqcap B \sqcap C$$

5. Quelques théorèmes relatifs aux ensembles

Propriétés :

1. Soit A, B et C trois ensembles. L'unions et l'intersections sont distributives, c'est-à-dire :

$$\mathrm{A} \cap (B \sqcup C) = (A \sqcap B) \sqcup (A \sqcap C)$$
$$A \sqcup (B \cap C) = (A \sqcup B) \sqcap (A \sqcup C)$$

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

5. Quelques théorèmes relatifs aux ensembles

Théorème 2. $A \cup B = B \cup A$ — Commutativité des unions

Théorème 3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$ — Associativité des unions

Théorème 4. $A \cap B = B \cap A$ — Commutativité des intersections

Théorème 5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ — Associativité des intersections

Théorème 6. The picture can't be displayed. — Première loi de distribution

Théorème 7. The picture can't be displayed. — Seconde loi de distribution

Théorème 8. The picture can't be displayed.

Théorème 9. Si The picture can't be displayed.

Théorème 10. The picture can't be displayed.

Théorème 11. The picture can't be displayed.

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

5. Quelques théorèmes relatifs aux ensembles

Théorème 12. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ Première loi de Morgan

Théorème 12. $(A \cap B)' = A' \cup B'$ Seconde loi de Morgan

Théorème 13. $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$ Pour tous ensembles A et B.

Exemple. On choisit au hasard un étudiant dans une classe

Soit M l'événement « l'étudiant est fort en math »

Soit E l'événement « l'étudiant est fort en économie »

Donc M∩E l'événement « l'étudiant est fort en math et en économie »

$$P(M\backslash E) = \frac{P(M \cap E)}{P(E)}$$

6. Probabilité conditionnelle

Définition : Soient A et B deux événements avec $P(A)\neq 0$. on appelle probabilité conditionnelle de B sachant A, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé.

Elle est notée P(B\A) est définie par :

$$P(B\backslash A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B\backslash A)$$

Soit alors, P(B\A), la probabilité que B se réalise, A étant réalisé. Dans la mesure où nous savons que A s'est réalisé, A devient le nouvel espace d'échantillonnage, remplaçant **Ω**, ce qui conduit à la définition suivante :

6. Probabilité conditionnelle

P(M) est la probabilité que l'étudiant soit fort en math

P(M\E) est la probabilité que l'étudiant soit fort en math sachant qu'il est fort en économie

Considérons que la classe est composée de 30 étudiants :

- 10 d'entre eux sont forts en math
- 12 sont forts en économie
- 7 sont forts dans les deux matières

6. Probabilité conditionnelle

Considérons que la classe est composée de 30 étudiants :

- 10 d'entre eux sont forts en math
- 12 sont forts en économie
- 7 sont forts dans les deux matières

$$P(M) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \qquad P(E) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} \qquad P(M \sqcap E) = \frac{7}{30}$$

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

6. Probabilité conditionnelle

Exemple. Evaluer la probabilité d'obtenir un nombre inférieur à 4 au cours du jet unique d'un dé :

1. Sans autre information
2. Si l'on sait que le résultat obtenu est impair

1. Soit B l'événement $\{inférieur\ à\ 4\}$ Puisque B est l'union des événements réalisation de 1, 2, ou 3 :

$$P(B) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

2. Soit A l'événement $\{nombre\ impair\}$; $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

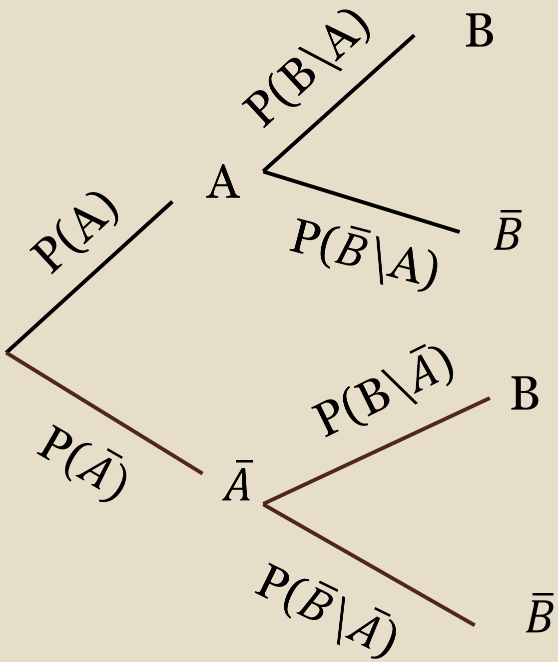
De plus $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $P(B \backslash A) = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(A)}} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$

Nous remarquons que la connaissance du fait que le résultat est impair entraine une élévation de la probabilité qui passe de 1\2 à 2\3.

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

6. Probabilité conditionnelle/Arbre de probabilité

Un arbre de probabilité : est un schéma permettant de résumer une expérience aléatoire connaissant des probabilités conditionnelles.



Règle 1. la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1

Règle 2. la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités sur ce chemin

Règle 3. formule de la probabilité totale : La probabilité d'un événement associé à plusieurs chemins est égale à la somme des probabilités de chacun de ces chemins.

Arbre de probabilité

Exemple. Un sac contient 50 boules, dont 20 rouges et 30 noires.

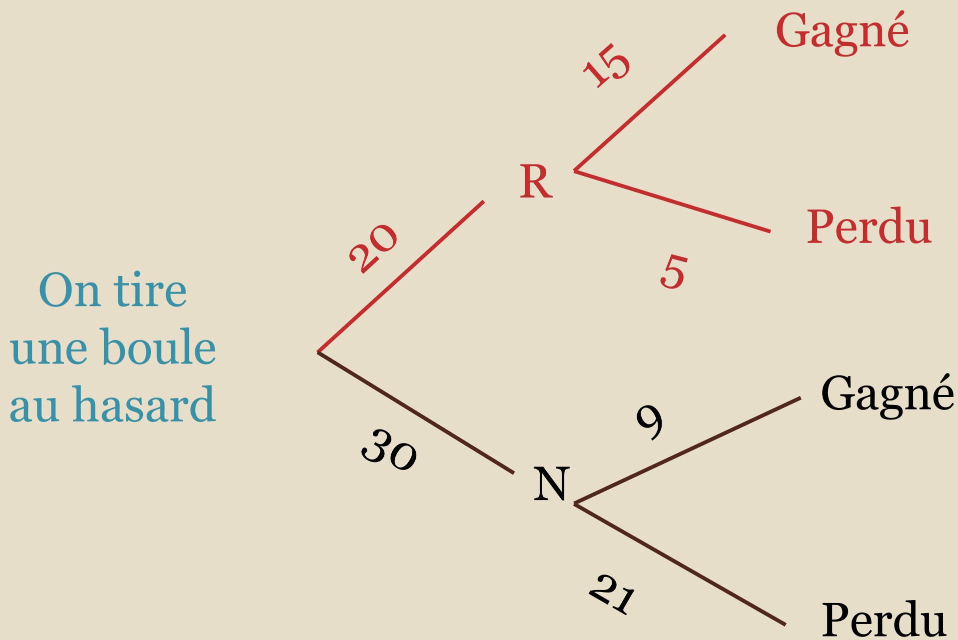
- 15 boules rouges sont marqués : Gagné
- 9 boules noires sont marqués : Gagné

On tire au hasard une boule dans le sac.

Construire un arbre de probabilité

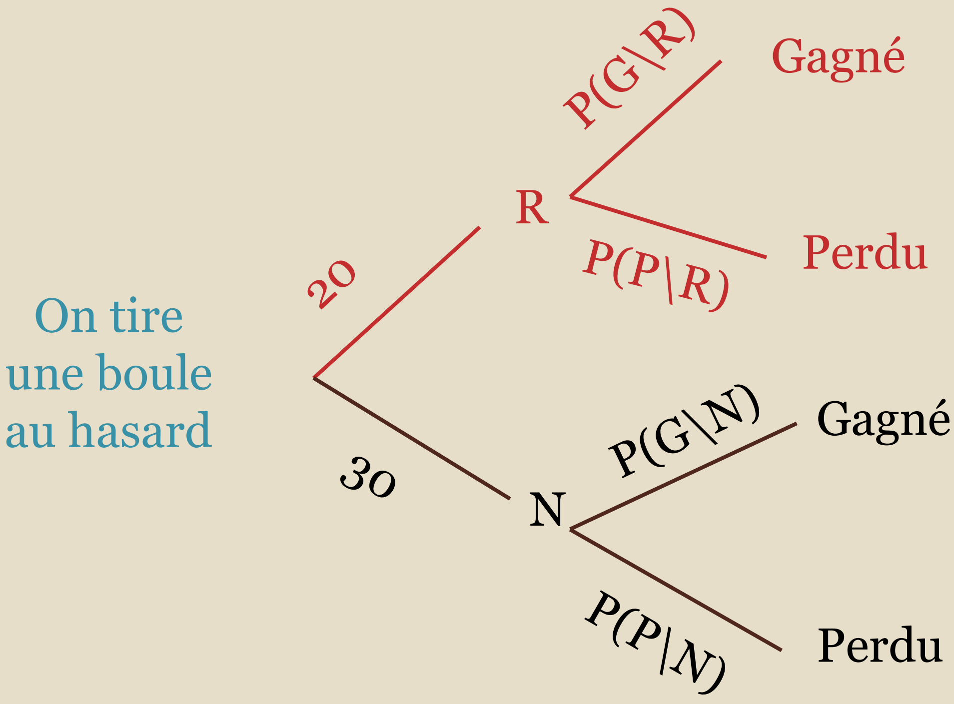
Chapitre 1. Ensembles et probabilités

6. Probabilité conditionnelle/Arbre de probabilité



Chapitre 1. Ensembles et probabilités

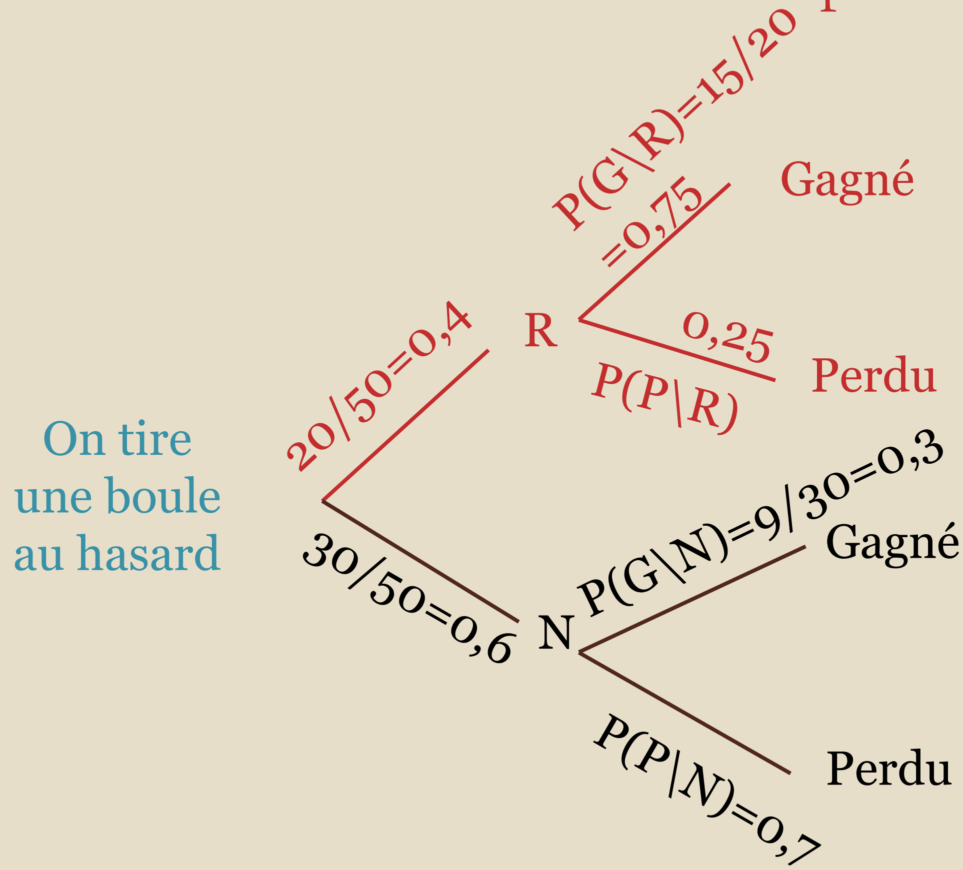
6. Probabilité conditionnelle/Arbre de probabilité



Chapitre 1. Ensembles et probabilités

6. Probabilité conditionnelle/Arbre de probabilité

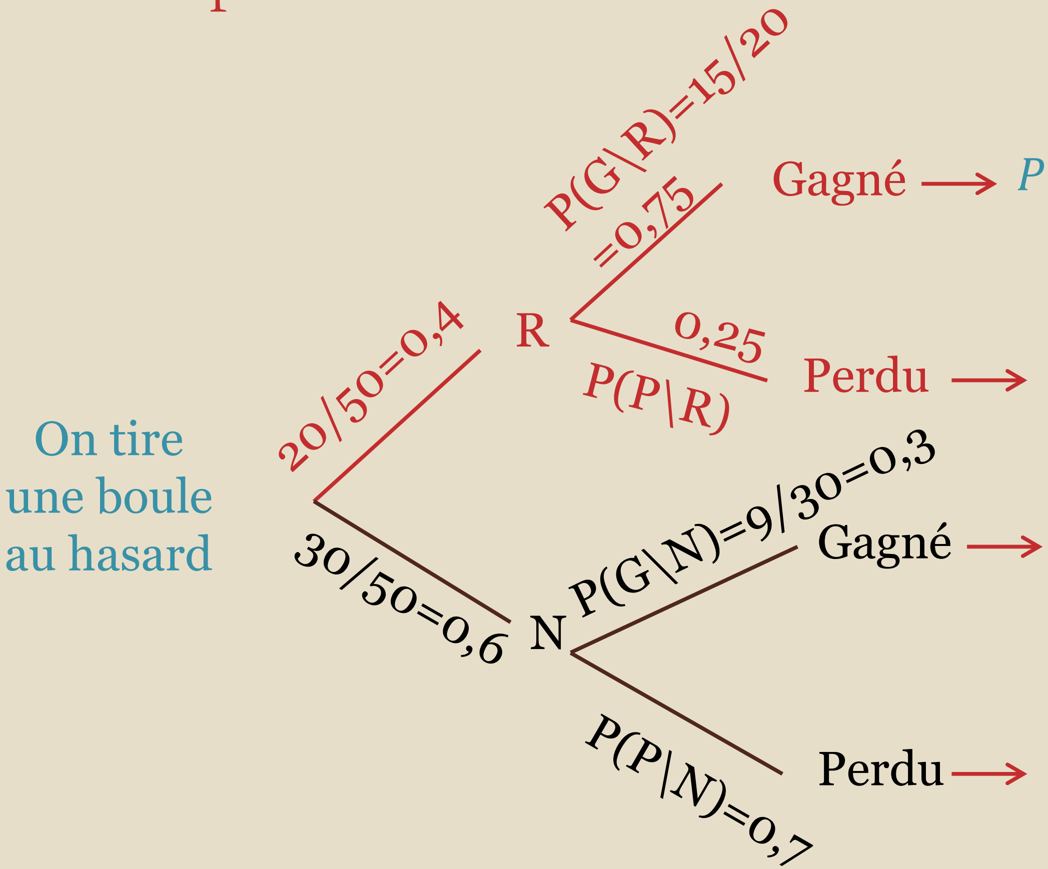
Arbre de probabilité



Chapitre 1. Ensembles et probabilités

6. Probabilité conditionnelle/Arbre de probabilité

Arbre de probabilité



$P(R \cap G) = 0{,}4 \times 0{,}75 = 0{,}3$

$P(R \cap P) = 0{,}4 \times 0{,}25 = 0{,}1$

$P(N \cap G) = 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18$

$P(N \cap P) = 0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}42$

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

6. Probabilité conditionnelle/Arbre de probabilité

Arbre de probabilité

Exemple. On tire au hasard une boule dans une urne contenant des boules rouges et des boules noires.

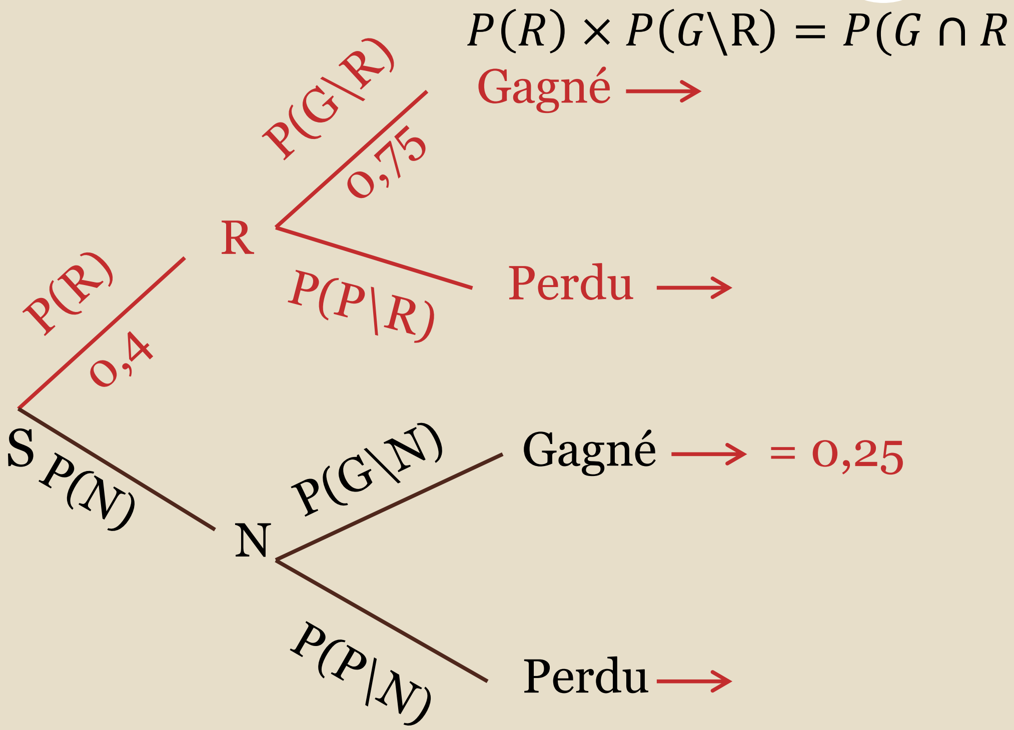
L'urne contient 40% de boules rouges

Parmi les boules rouges , 75% sont gagnantes

Et 25% de boules sont noirs et gagnantes

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

6. Probabilité conditionnelle/Arbre de probabilité



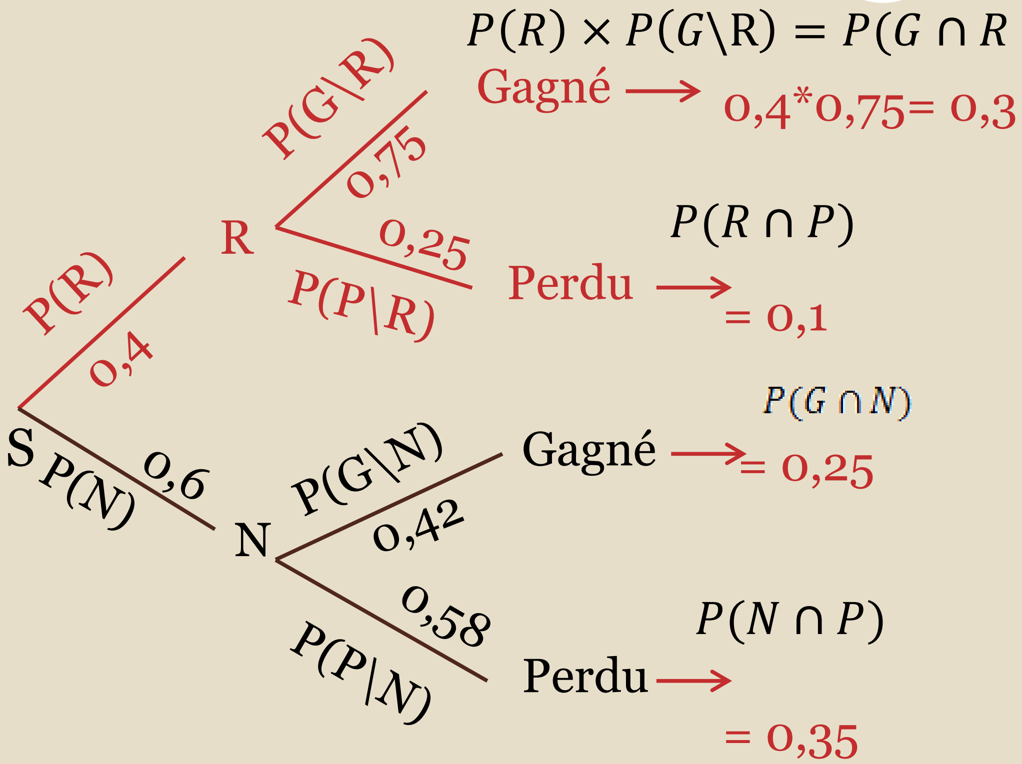
Règle 1. la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1

Règle 2. la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités sur ce chemin

Règle 3. formule de la probabilité totale : La probabilité d'un événement associé à plusieurs chemins est égale à la somme des probabilités de chacun de ces chemins.

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

6. Probabilité conditionnelle/Arbre de probabilité



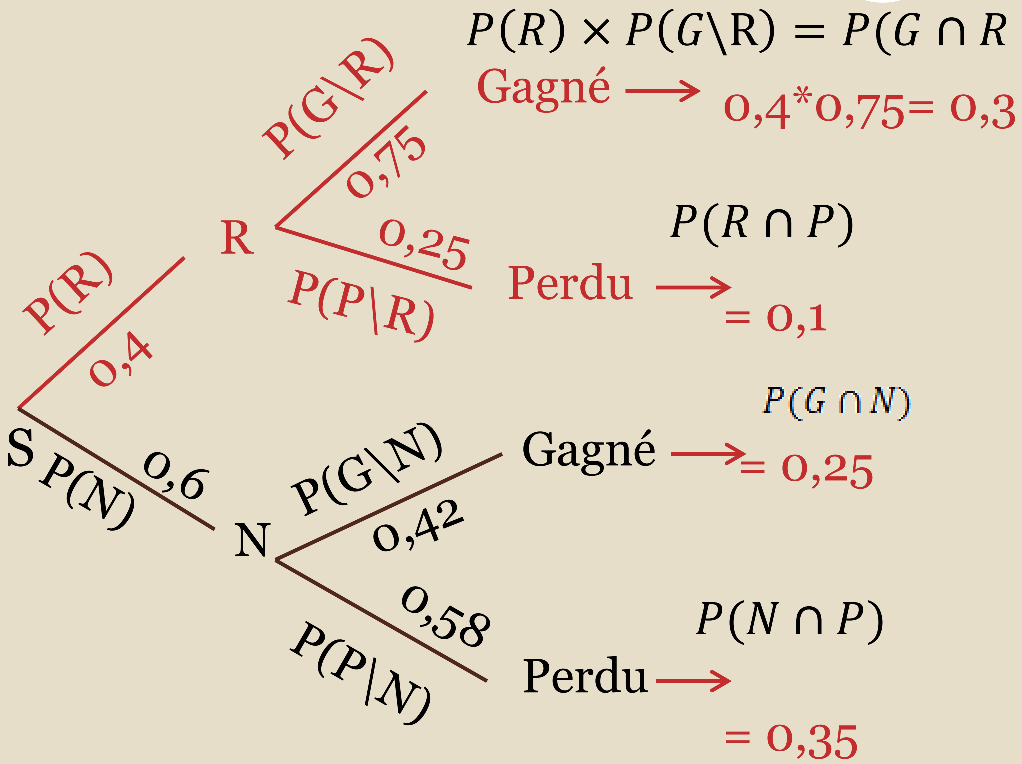
Règle 1. la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1

Règle 2. la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités sur ce chemin

Règle 3. formule de la probabilité totale : La probabilité d'un événement associé à plusieurs chemins est égale à la somme des probabilités de chacun de ces chemins.

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

6. Probabilité conditionnelle/Arbre de probabilité



La probabilité de tirer une boule gagnante ?

P(G) = P(G∩R)+P(G∩N)= 0,3+0,25=0,55

Règle 1. la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1

Règle 2. la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités sur ce chemin

Règle 3. formule de la probabilité totale : La probabilité d'un événement associé à plusieurs chemins est égale à la somme des probabilités de chacun de ces chemins.

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

6. Probabilité conditionnelle/Evénements indépendants

- Si $P(B \backslash A) = P(B)$; c-à-d si la probabilité de réalisation de B n'est pas affectée par la réalisation ou le non réalisation de A.

- On dit que deux événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants lorsque :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

A et B sont indépendants, si seulement si :

$$P(B \backslash A) = P(B) \text{ ou } P(A \backslash B) = P(A)$$

6. Probabilité conditionnelle/Evénements indépendants

$$P(B \backslash \mathrm{A}) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)}$$

$$= P(B)$$

Qu'on restreint l'univers ou pas, on trouves le même résultat.

6. Probabilité conditionnelle/Evénements indépendants

Exemple. Un dé non truqué est jeté deux fois. Quelle est la probabilité d'obtenir un 4,5 ou 6 au premier jet et un 1, 2, 3 ou 4 au deuxième jet ?

Exemple. Un dé non truqué est jeté deux fois. Quelle est la probabilité d'obtenir un 4,5 ou 6 au premier jet et un 1, 2, 3 ou 4 au deuxième jet ?

On note l'événement A ={4,5,6} et B={1,2,3,4}

On cherche alors P(A∩B)

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \backslash \mathrm{A}) = P(A) \times P(B) = \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$$

On remarque que le résultat du second jet est indépendant du résultat du premier jet, cela veut dire que P(B\A) = P(B)

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

6. Probabilité conditionnelle/Règle ou théorème de Bayes

- L'inférence bayésienne est une méthode de raisonnement par laquelle on calcule les probabilités de diverses causes hypothétiques à partir de l'observation d'événements connus.
- Ce théorème permet d'évaluer les probabilités des différents événements, A1, A2,…,An qui peuvent causer la réalisation de A.
- C'est pour cette raison le théorème ou règle de Bayes est souvent désigné comme un théorème sur la probabilité des causes.

$$P(A\backslash \mathrm{B}) = \frac{P(B\backslash \mathrm{A}) \times P(A)}{P(B)}$$

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

6. Probabilité conditionnelle/Règle ou théorème de Bayes

Etude concrète. « D'après les données bibliographiques à disposition, **la sensibilité** peut être estimée entre 56 et 83 %. Dès lors, sur la base de cette estimation de la sensibilité et d'une **spécificité** excellente à 99 % (quasiment pas de faux-positifs), nous avons calculé les valeurs prédictives positives (VPP) et négatives (VPN) en fonction de **la prévalence** de Covid-19 au sein de la population dont est issu le patient (probabilité prétest). »

Performance du frottis nasopharyngé-PCR pour le diagnostic du Covid-19 - Recommandations pratiques sur la base des premières données scientifiques

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

6. Probabilité conditionnelle/Règle de Bayes

Etude concrète. « D'après les données bibliographiques à disposition, **la sensibilité** peut être estimée entre 56 et 83 %. Dès lors, sur la base de cette estimation de la sensibilité et d'une **spécificité** excellente à 99 % (quasiment pas de faux-positifs), nous avons calculé les **valeurs prédictives positives (VPP)** et **négatives (VPN)** en fonction de **la prévalence** de Covid-19 au sein de la population dont est issu le patient (probabilité prétest).

La prévalence : est la probabilité que le patient soit malade (M)

La sensibilité : est la probabilité qu'un test soit positif sur une personne dont on est sûr qu'elle est malade, c'est $P(T\backslash M)$

La spécificité : est la probabilité qu'un test soit négatif sur une personne dont on est sûr qu'elle n'est pas malade $P(\bar{T}\backslash \bar{M})$

6. Probabilité conditionnelle/Règle de Bayes

On note les événements suivants :

M : la personne est malade, $\bar{M}$ **:** la personne n'est pas malade

T : le test est positif, $\bar{T}$ **:** le test est négatif

La prévalence : est la probabilité que le patient soit malade (M)

La sensibilité : est la probabilité qu'un test soit positif sur une personne dont on est sûr qu'elle est malade, c'est $P(T \backslash M)$

La spécificité : est la probabilité qu'un test soit négatif sur une personne dont on est sûr qu'elle n'est pas malade $P(\bar{T} \backslash \bar{M})$

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

6. Probabilité conditionnelle/Règle de Bayes

La prévalence : est la probabilité que le patient soit malade (M)

La sensibilité : est la probabilité qu'un test soit positif sur une personne dont on est sûr qu'elle est malade, c'est $P(T\backslash M)$

La spécificité : est la probabilité qu'un test soit négatif sur une personne dont on est sûr qu'elle n'est pas malade $P(\bar{T}\backslash\bar{M})$

VPP : Valeur Prédictive Positive : Probabilité d'avoir la maladie sachant que le test est positif. $\boldsymbol{P(M\backslash T)}$ $\longrightarrow$ l'inverse de la sensibilité

VPN : Valeur Prédictive Négative : Probabilité de ne pas avoir la maladie sachant que le test est négatif. $\boldsymbol{P(\bar{M}\backslash\bar{T})}$ $\longrightarrow$ l'inverse de la spécificité

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

6. Probabilité conditionnelle/Règle ou théorème de Bayes

Prévalence 10%

	Maladie + (100)	Maladie – (900)
Test +	56 - 83	9
Test -	17 - 44	891

Spécificité	0,99
Sensibilité	0,56-0,83
VPP	**0,86 – 0,90**
VPN	**0,95 – 0,98**

Prévalence 20%

	Maladie + (100)	Maladie – (400)
Test +	56 - 83	4
Test -	17 - 44	396

Spécificité	0,99
Sensibilité	0,56-0,83
VPP	**0,93 – 0,95**
VPN	**0,90 – 0,96**

Prévalence 30%

	Maladie + (100)	Maladie – (233)
Test +	56 - 83	2
Test -	17 - 44	231

Spécificité	0,99
Sensibilité	0,56-0,83
VPP	**0,97 – 0,98**
VPN	**0,84 - 0,93**

Prévalence 50%

	Maladie + (100)	Maladie – (100)
Test +	56 - 83	1
Test -	17 - 44	99

Spécificité	0,99
Sensibilité	0,56-0,83
VPP	**0,98 – 0,99**
VPN	**0,69 – 0,85**

6. Probabilité conditionnelle/Règle ou théorème de Bayes

Prévalence 10%

	Maladie + (100)	Maladie – (900)
Test +	56 - 83	9
Test -	17 - 44	891

Spécificité	0,99
Sensibilité	0,56-0,83
VPP	0,86 – 0,90
VPN	0,95 – 0,98

Quelle la probabilité que la personne soit malade alors que le test est positif?

On cherche alors à évaluer P(M\T)?

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

6. Probabilité conditionnelle/Règle ou théorème de Bayes

P(M)

Prévalence 10%

	Maladie + (100)	Maladie – (900)
Test +	56 - 83	9
Test -	17 - 44	891

$P(\bar{T} \backslash \bar{M})$

$P(T \backslash M)$

Spécificité	0,99
Sensibilité	0,56-0,83
VPP	0,86 – 0,90
VPN	0,95 – 0,98

Quelle la probabilité que la personne soit malade alors que le test est positif?

On cherche alors à évaluer P(M\T)?

6. Probabilité conditionnelle/Règle ou théorème de Bayes

Quelle la probabilité que la personne soit malade alors que le test est positif?

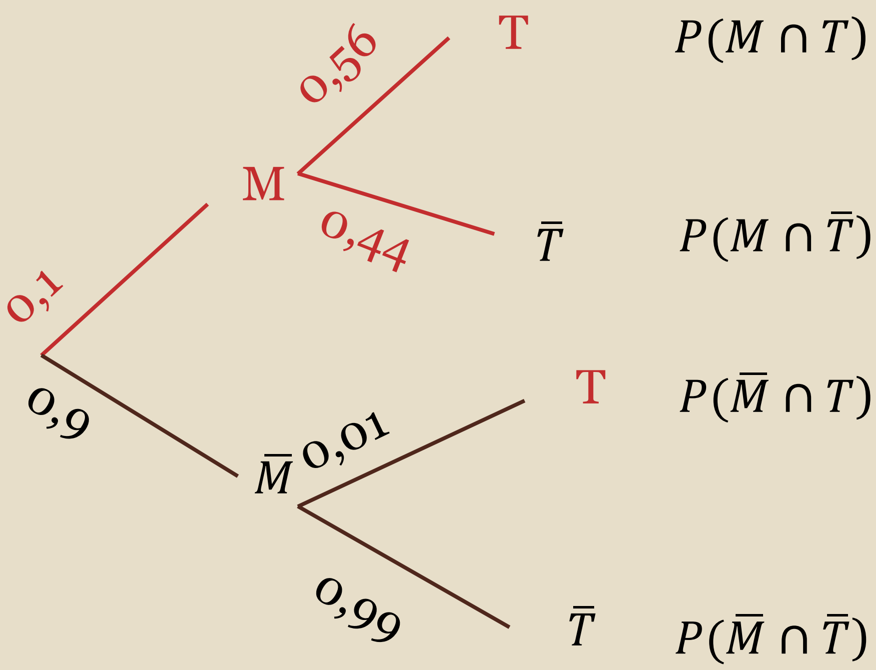
$$P(A\backslash B) = \frac{P(B\backslash A) \times P(A)}{P(B)}$$

$$P(M\backslash T) = \frac{P(T\backslash M) \times P(M)}{P(T)}$$

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

6. Probabilité conditionnelle/Règle ou théorème de Bayes

Taux de prévalence de 10%



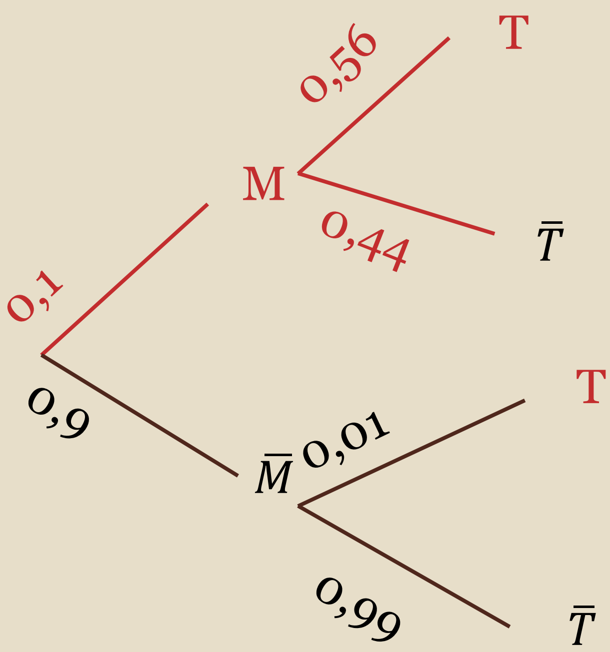
$$P(M\backslash \mathrm{T}) = \frac{P(T\ \backslash \mathrm{M}) * P(M)}{P(T)}$$

$$P(\bar{M}\backslash \bar{T}) = \frac{P(\bar{T}\backslash \bar{M}) \times P(\bar{M})}{P(\bar{T})}$$

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

6. Probabilité conditionnelle/Règle ou théorème de Bayes

Taux de prévalence de 10%



$P(M \cap T)$

$P(M \cap \bar{T})$

$P(\bar{M} \cap T)$

$P(\bar{M} \cap \bar{T})$

$$P(M \backslash \mathrm{T}) = \frac{P(T \backslash \mathrm{M}) * P(M)}{P(T)}$$

?

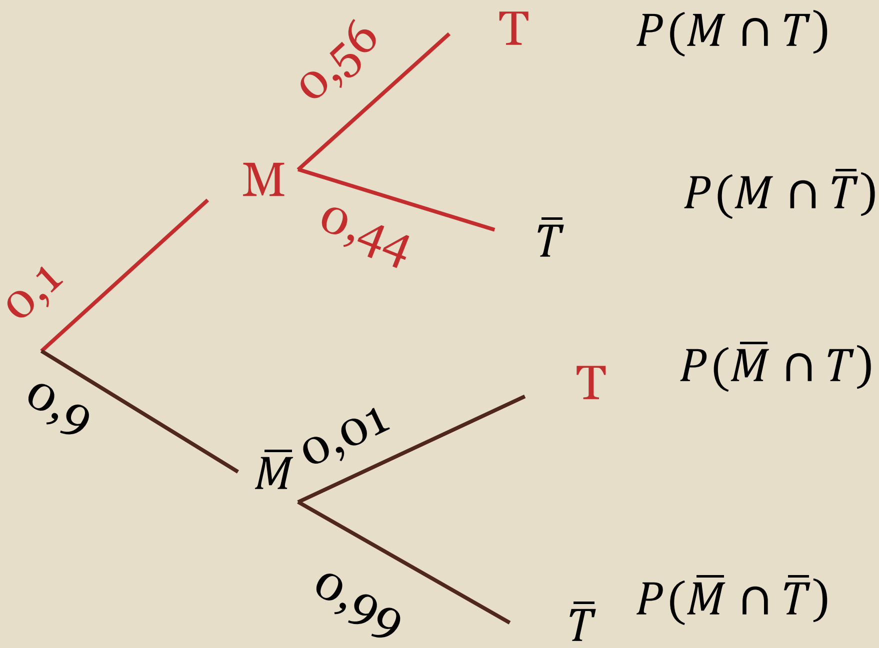
$$P(\bar{M} \backslash \bar{T}) = \frac{P(\bar{T} \backslash \bar{M}) \times P(\bar{M})}{P(\bar{T})}$$

?

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

6. Probabilité conditionnelle/Règle ou théorème de Bayes

Taux de prévalence de 10%



$$P(M\backslash \mathrm{T}) = \frac{P(T \backslash \mathrm{M}) * P(M)}{P(T)}$$

?

$$P(\bar{M}\backslash \bar{T}) = \frac{P(\bar{T}\backslash \bar{M}) \times P(\bar{M})}{P(\bar{T})}$$

?

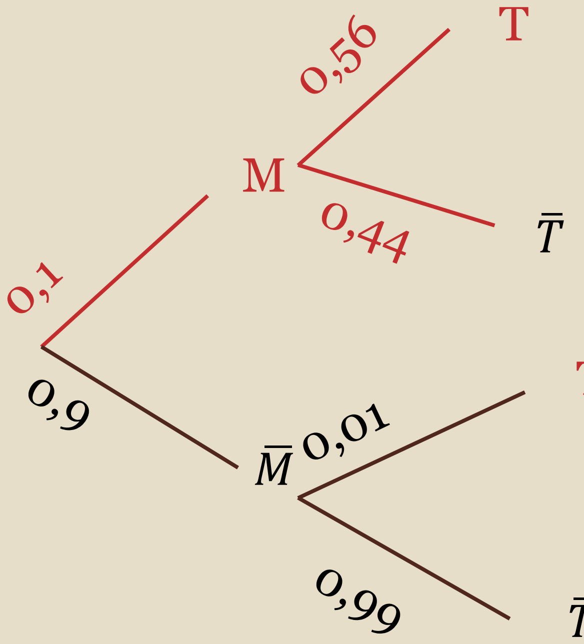
$$P(\mathrm{T}) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) = (0{,}1 \times 0{,}56) + (0{,}9 \times 0{,}01) = 0{,}065$$

$$P(\bar{T}) = 1 - 0{,}065 = 0{,}935$$

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

6. Probabilité conditionnelle/Règle ou théorème de Bayes

Taux de prévalence de 10%



$P(M \cap T)$

$P(M \cap \bar{T})$

$P(\bar{M} \cap T)$

$P(\bar{M} \cap \bar{T})$

$$P(M\backslash \mathrm{T}) = \frac{P(T\backslash \mathrm{M}) * P(M)}{P(T)}$$

$$= \frac{0{,}1 \times 0{,}56}{0{,}065} = 0{,}86$$

$$P(\bar{M}\backslash \bar{T}) = \frac{P(\bar{T}\backslash \bar{M}) \times P(\bar{M})}{P(\bar{T})}$$

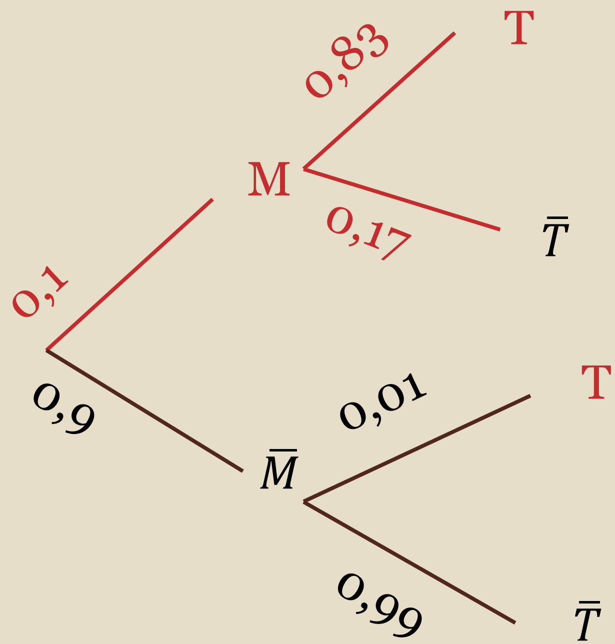
$$= \frac{0{,}9 \times 0{,}99}{0{,}935} = 0{,}95$$

$$P(\mathrm{T}) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) = (0{,}1 \times 0{,}56) + (0{,}9 \times 0{,}01) = 0{,}065$$

$$P(\bar{T}) = 1 - 0{,}065 = 0{,}935$$

6. Probabilité conditionnelle/Règle ou théorème de Bayes

Taux de prévalence de 10%



$P(M \cap T)$

$P(M \cap \bar{T})$

$P(\bar{M} \cap T)$

$P(\bar{M} \cap \bar{T})$

$$P(M \backslash \mathrm{T}) = \frac{P(T \backslash \mathrm{M}) * P(M)}{P(T)}$$

$$= \frac{0{,}1 \times 0{,}83}{0{,}092} = 0{,}90$$

$$P(\bar{M} \backslash \bar{T}) = \frac{P(\bar{T} \backslash \bar{M}) \times P(\bar{M})}{P(\bar{T})}$$

$$= \frac{0{,}9 \times 0{,}99}{0{,}902} = 0{,}98$$

$$P(\mathrm{T}) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) = (0{,}1 \times 0{,}83) + (0{,}9 \times 0{,}01) = 0{,}092$$

$$P(\bar{T}) = 1 - 0{,}092 = 0{,}908$$

6. Probabilité conditionnelle/Règle ou théorème de Bayes

Résumé :

Probabilité Pré-test	VPN
10%	0,95 - 0,98
20%	0,90 - 0,96
30%	0,84 - 0,93
50%	0,69 - 0,85

On s’intéresse au test négatif, la probabilité qu’un patient ne soit pas réellement malade quand son test est négatif VPN

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

7. Analyse combinatoire

- Dans de nombreux cas, le nombre de points d'échantillon de l'espace fondamental, n'est pas très grand, aussi le comptage de ces points dans le but d'évaluer les probabilités ne présente pas de difficultés majeurs. Cependant, quand le dénombrement direct devient impossible on fait appel à l'analyse combinatoire qui n'est autre chose qu'une méthode élaborée de comptage.
- L'analyse combinatoire est une branche de la mathématique qui s'occupe de l'étude de l'ensemble des issues, événements ou faits avec leurs arrangements (combinaisons) ordonnés ou non selon certaines contraintes données.
- Elle s'occupe à étudier comment compter les objets dans différents contextes

Le principe multiplicatif

- On considère deux ensembles finis A et B.
- On note $A \times B$ le produit de A par B. c'est-à-dire l'ensemble des couples (x,y) où x est dans A et y est dans B.

$$\boxed{\text{Alors : } card(A*B) = card(A)*card(B)}$$

7. Principe fondamental du comptage. Diagrammes arborescents

Si une opération quelconque peut être effectuée de n_1 façons différentes, puis qu'une seconde opération peut être effectuée de n_2 façons différentes…et qu'enfin une kième opération peut être effectué de n_k façons différentes, alors les k opérations peuvent être effectués dans l'ordre indiqué de $n_1 n_2 \ldots n_k$ façons différentes.

7. Principe fondamental du comptage. Diagrammes arborescents

Exemple. Si un individu possède 2 chemises et 4 cravates, il peut alors choisir de $2\times4=8$ manières différentes, d'abord une chemise puis une cravate.

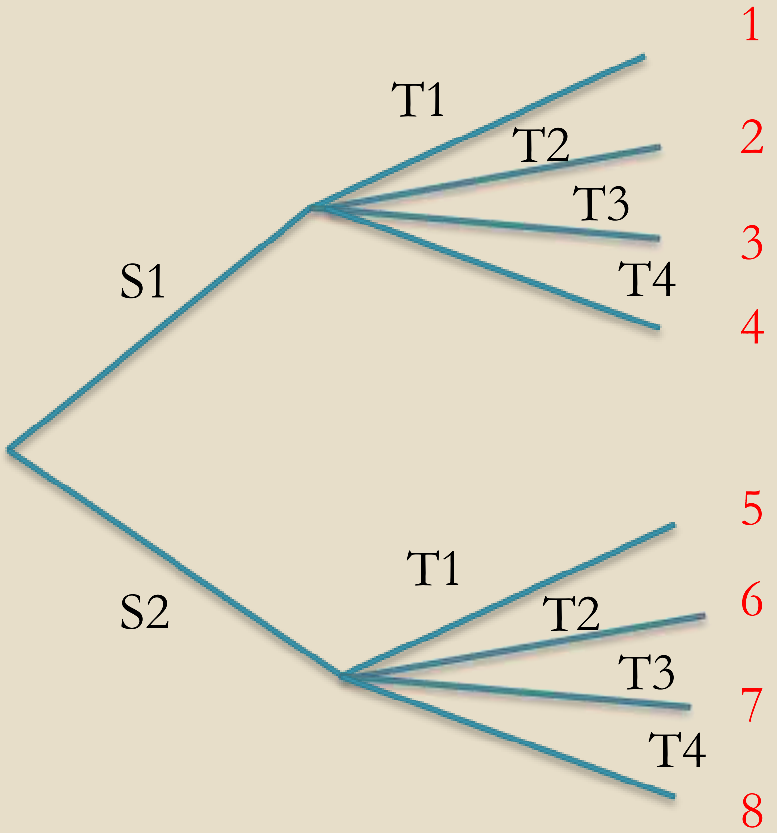
$$\text{card}(A\times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B)=2\times4=8$$

En relation avec ce résultat on utilise souvent un diagramme, appelé **diagramme arborescent** (arbre de probabilité).

Représentons les chemises par S1 et S2 , et les cravates par T1, T2, T3 et T4. Les différentes manières de choisir une chemise puis une cravate sont indiqués sur le diagramme arborescent :

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

7. Principe fondamental du comptage. Diagrammes arborescents

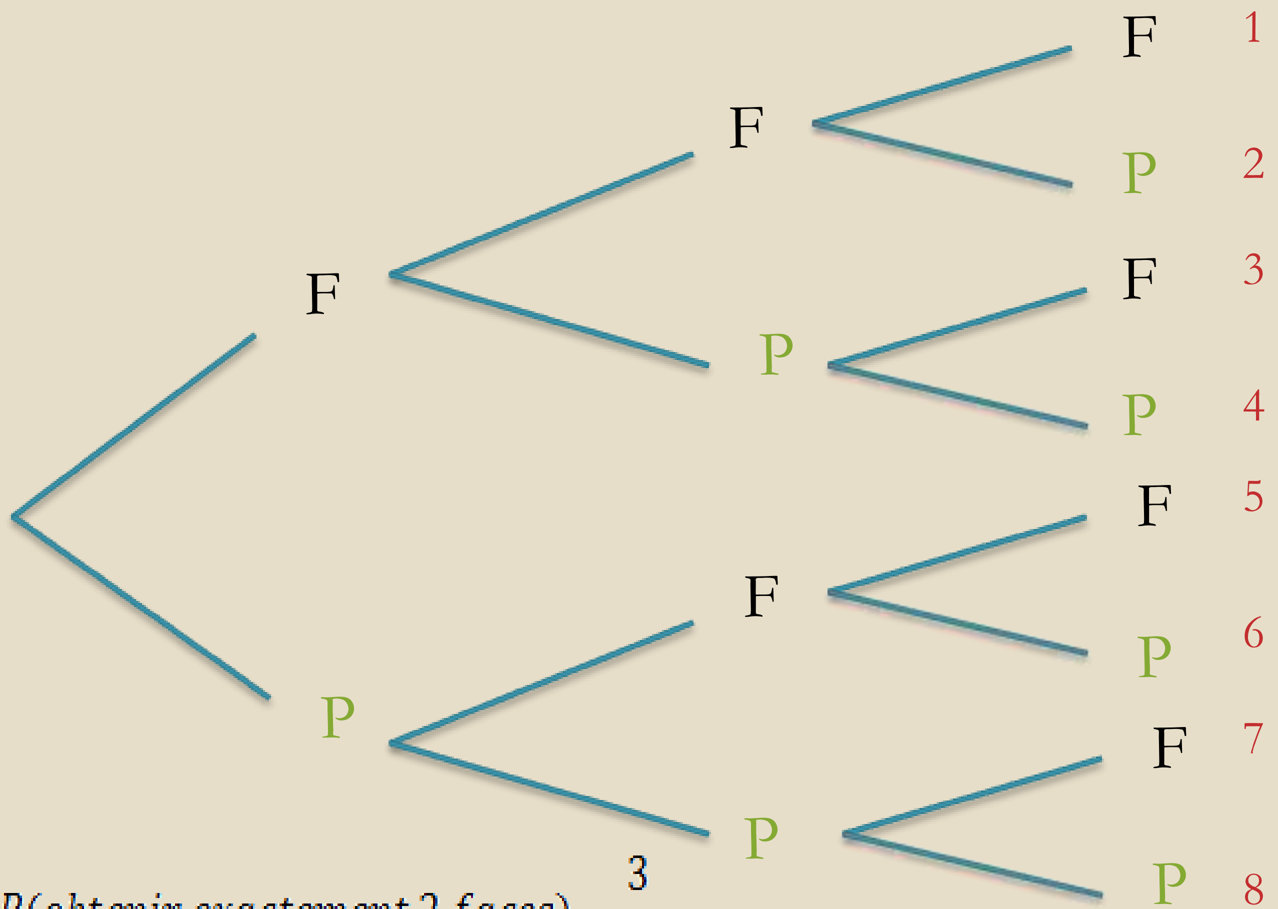


7. Principe fondamental du comptage. Diagrammes arborescents

Exemple. Calculer la probabilité d'obtenir exactement 2 face en lançant trois fois une pièce de monnaie.

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

7. Principe fondamental du comptage. Diagrammes arborescents



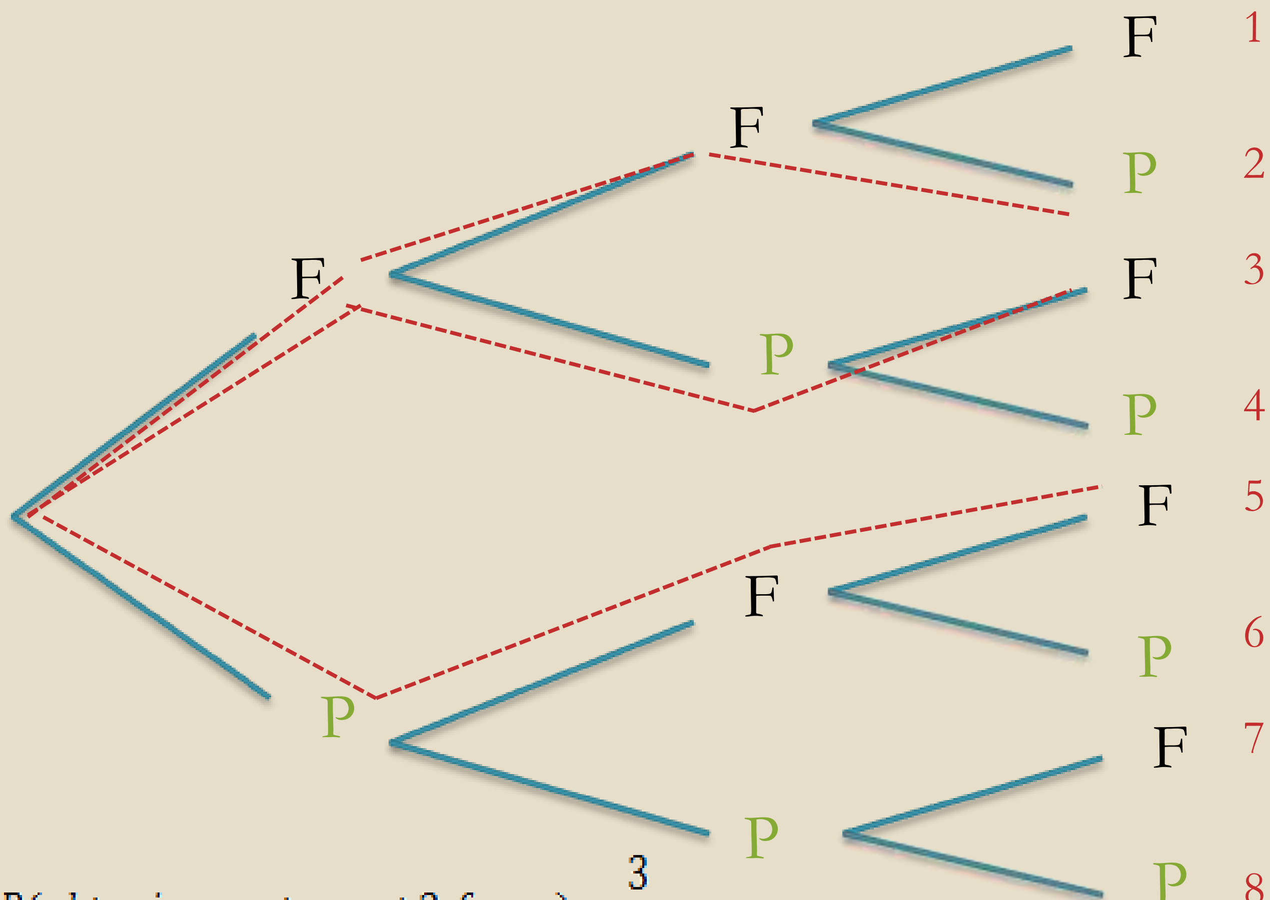
8 résultats possibles

$$2^3 = 8$$

$$P(obtenir\ exactement\ 2\ faces) = \frac{3}{8}$$

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

7. Principe fondamental du comptage. Diagrammes arborescents



8 résultats possibles

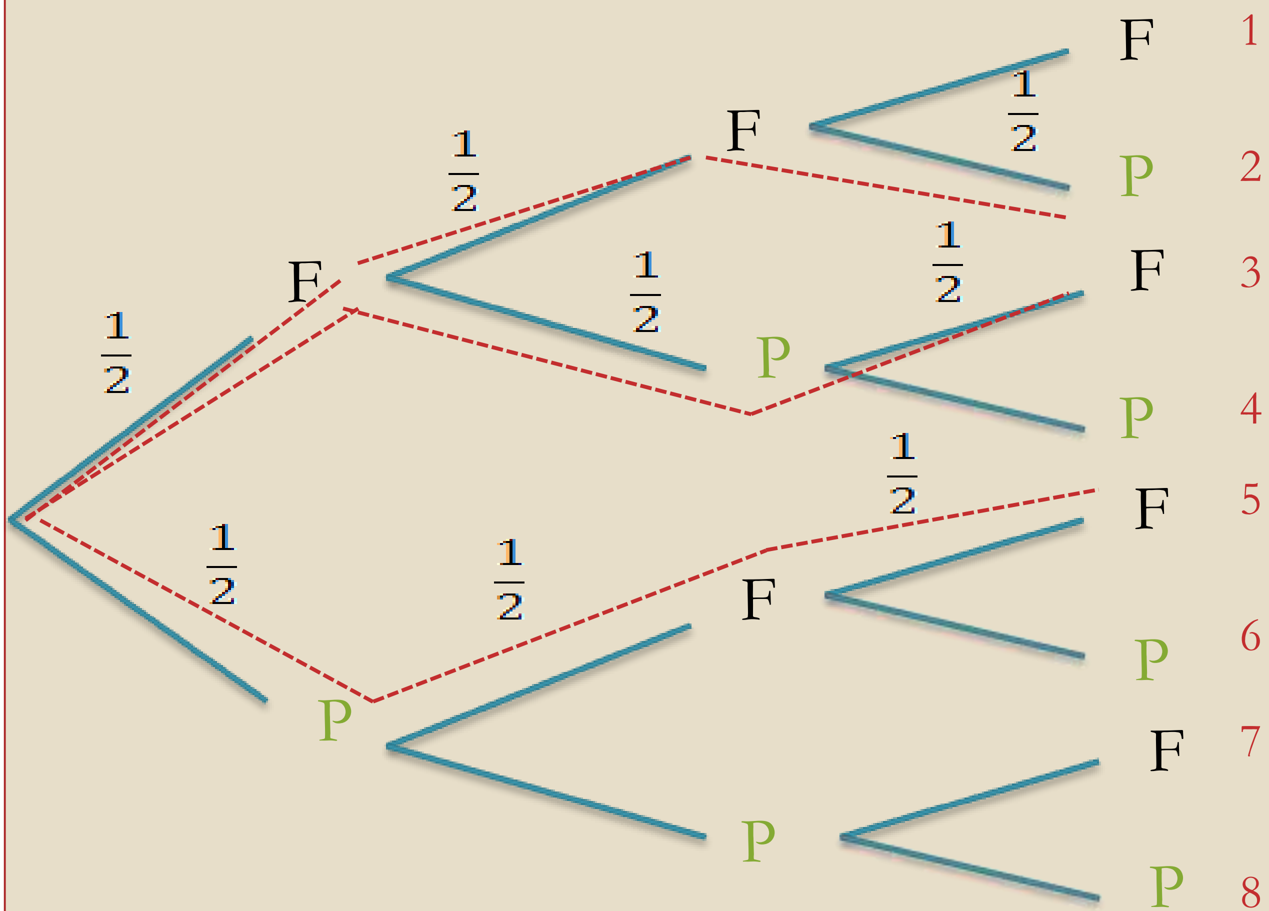
$2^3 = 8$

3 résultats favorables

$$P(obtenir\ exactement\ 2\ faces) = \frac{3}{8}$$

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

7. Principe fondamental du comptage. Diagrammes arborescents

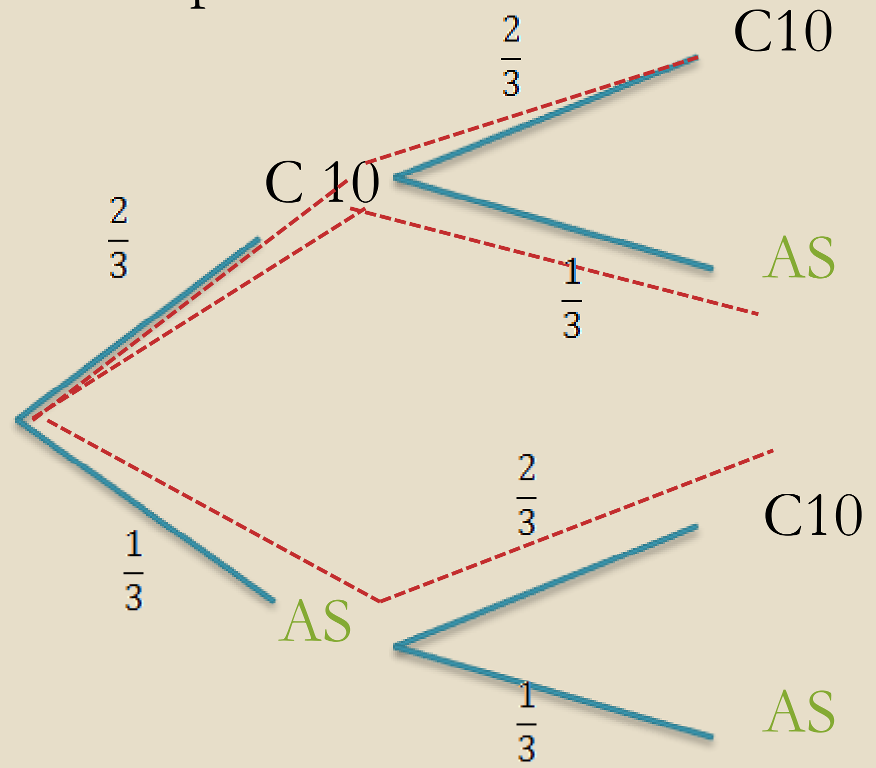


$$P(exactement\ 2\ faces) = (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$$

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

7. Principe fondamental du comptage. Diagrammes arborescents

Exemple. On tire 2 fois de suite une carte avec remise dans un jeu de 3 cartes et 2 de ces cartes représente C10 et une carte AS. Calculer la probabilité d'obtenir au moins carte de 10?



8.Permutations

Soient n objets donnés et distincts et que l'on souhaite en aligner r d'entre eux sur une droite. Dans la mesure où il y a n manières de choisir le premier objet, puis, une fois ce choix fait, n-1 manières de choisir le suivant,…, et finalement n-r+1 de choisir le rième objet, il résulte du principe fondamental de comptage que le nombre d'arrangement est $P_n^r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$

est le nombre d'arrangement de n objets.

Dans le cas particulier où r=n, l'expression devient : $P_n^n = n(n-1)\dots 1 = n!$

8.Permutations

Le produit qui comprend n facteurs de 1 à n s'appelle une factorielle et se lit factorielle n. il y a lieu de noter que dans ce cas, on a déterminé le nombre de façons de ranger n objets par groupes de n. les groupes seront tous identiques au niveau des objets contenus mais leur ordre sera différent selon les groupes. On aura alors réalisé des permutations de **l'ordre** des objets dans les groupes.

$P_n^n = n(n-1)\dots 1 = n!$: cette expression représente alors le nombre total de permutations possibles avec n objets.

$P_n^r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$

$P_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$: cette expression peut s'exprimer en termes de factorielles :

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

8.Permutations

Une permutation est une **disposition ordonnée** de **tous les éléments d'un ensemble.**
Deux permutations d'un ensemble se distinguent par l'ordre de disposition des éléments qui le composent.

Lorsqu'on veut calculer le nombre de permutations possibles : savoir combien de façons différentes on peut ordonner tous les élément du même ensemble.

8.Permutations et arrangement

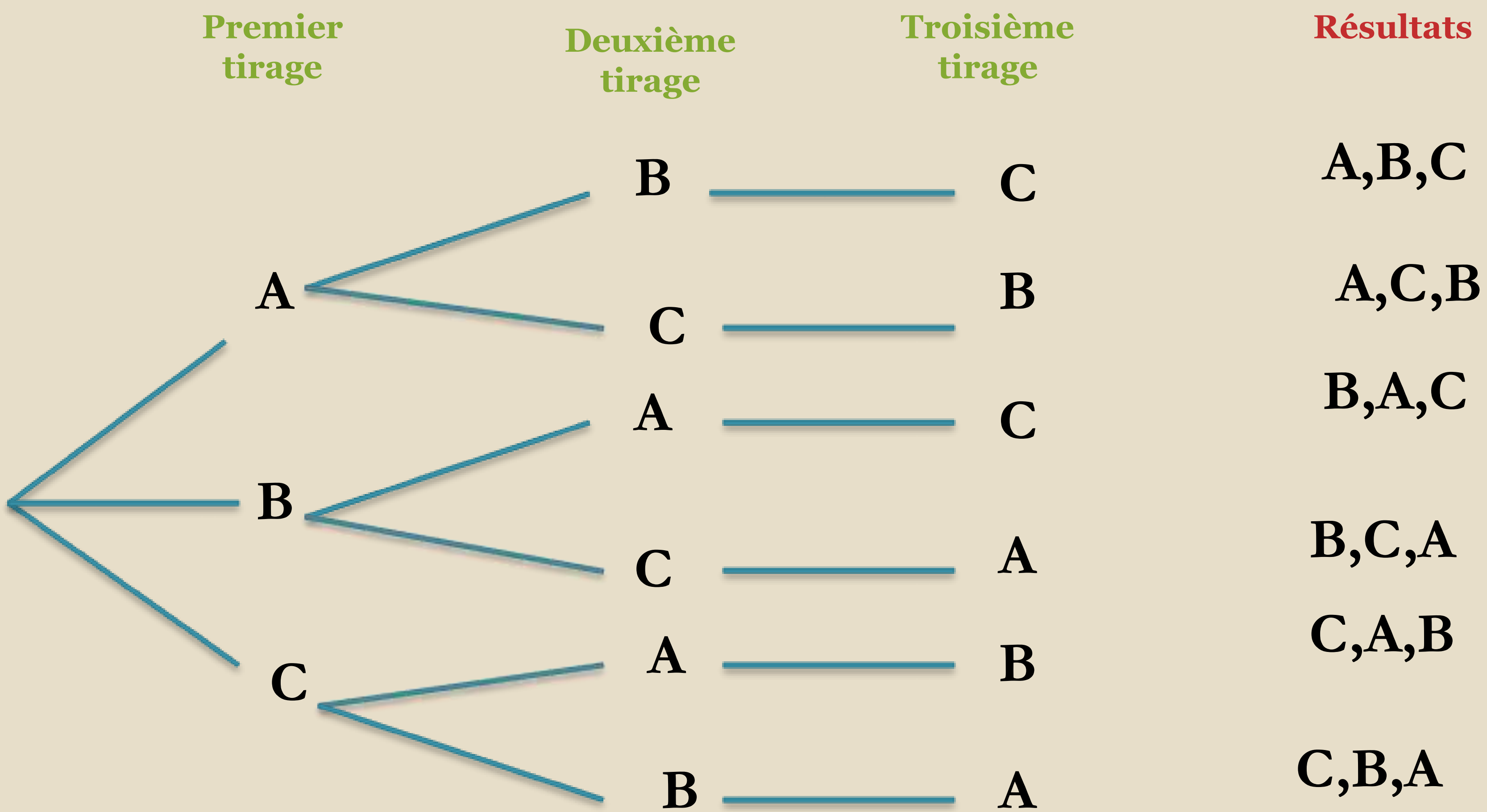
Exemple. On tire **successivement** 3 billes d'un sac en contenant 3 identifiées par A, B et C. les résultats possibles sont :

A B C

$$\left.\begin{array}{l}(A,B,C)\\(A,C,B)\\(B,A,C)\\(B,C,A)\\(C,A,B)\\(C,B,A)\end{array}\right\}\ \text{6 permutations}$$

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

8.Permutations et arrangement



Chapitre 1. Ensembles et probabilités

8.Permutations

Une permutation de n objets distincts est une suite ordonnée de ces n objets.

Exemple. Avec ces trois symboles 458, quel est le nombre des permutations possibles :

548	485
854	584
458	845

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

8.Permutations

Une permutation de n objets distincts est une suite ordonnée de ces n objets.

Exemple. Avec ces trois symboles 458, quel est le nombre des permutations possibles

548	485
854	584
458	845

Nombre de permutations de n objets distincts est n!

$3! = 3.2.1 = 6$

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

9. Arrangements

Un arrangement est une suite ordonnée d'un certain nombre d'éléments d'un ensemble

Exemple. On organise une course comprenant 10 personnes et on s'intéresse au podium formé des trois premiers dans l'ordre.

Combien de podium différents existe-t-il

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

8. Arrangement sans répétition

Exemple. On organise une course comprenant 10 personnes et on s'intéresse au podium formé des trois premiers dans l'ordre.

Combien de podium différents existe-t-il ?

OR		Argent		Bronze	
10	*	9	*	8	**=720**

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

8. Arrangement sans répétition

Exemple. On organise une course comprenant 10 personnes et on s'intéresse au podium formé des trois premiers dans l'ordre.

Combien de podium différents existe-t-il

OR		Argent		Bronze	
10	*	9	*	8	=720

Le nombre d'arrangement sans répétition de r objet parmi n objets est

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

8. Arrangement sans répétition

Exemple. On organise une course comprenant 10 personnes et on s'intéresse au podium formé des trois premiers dans l'ordre.

Combien de podium différents existe-t-il?

Le nombre d'arrangement sans répétition de r objet parmi n objets est

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 720$$

9. Arrangement avec répétition

Exemple. Combien de nombre à 5 chiffres peut on écrire avec les chiffres 1,2 et 3 seulement.

___ ___ ___ ___ ___

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

9. Arrangement avec répétition

Exemple. Combien de nombre à 5 chiffres peut on écrire avec les chiffres 1,2 et 3 seulement.

3 1 2 3 3

Possibilités : $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$

Le nombre d'arrangement avec répétition de r objet parmi n objets est : n^r

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

9. Combinaison

Dans le cas des permutations (ou des arrangements) nous nous intéressons à l'ordre dans lequel les objets sont rangés. Dans ces conditions abc est une permutation différente de bca. Dans de nombreux problèmes, cependant, la question qui se pose est de sélectionner des objets sans aucune référence à l'ordre dans lequel ils sont (combinaisons). Dans un tel cas abc et bca constituent la même combinaison.

Le nombre de combinaison de n objets se note C_n^r ou $\binom{n}{r}$. Sa valeur est :

$$\binom{n}{r} = C_n^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{A_n^r}{r!}$$

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

9. Combinaison

Il est facile de montrer que : $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ ou $C_n^r = C_n^{n-r}$

Noter que choisir r éléments, c'est choisir de ne pas choisir les n - r restants

On peut aisément calculer les combinaisons C_n^r en vertu de la formule de récurrence :

Pour tout n de N :

Le cas r = 0 peut sembler bizarre : c'est une convention justifiée par le fait que n'est autre que le nombre de parties à r éléments dans un ensemble de cardinal n; r = 0 correspond à l'unique partie ne possédant aucun élément : l'ensemble vide Ø

9. Combinaison

Exemple. On organise une course comprenant 10 personnes et on s'intéresse au podium formé des trois premiers sans tenir compte de l'ordre.

Combien de podium différents existe-t-il?

9. Combinaison

Exemple. Le nombre de façons différentes de choisir 3 cartes dans un groupe de 8 est :

$$\binom{n}{r} = C_n^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$C_8^3 = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8.7.6}{3!} = 56$$

9. Combinaison

Exemple. Combien des éléments possibles de prendre 2 chiffres parmi ces 3 chiffres : 1,2, et 3.

9. Combinaison

Exemple. Combien des éléments possibles de prendre 2 chiffres parmi ces 3 chiffres : 1,2, et 3.

(1,2) (1,3) (2,3)

$$\binom{n}{r} = C_n^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$C_3^2 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{3.2.1}{2.1} = 3$$

$$A_3^2 = \frac{3!}{1!} = 3! = 3.2.1 = 6$$

9. Combinaison

Propriétés des combinaisons :

$$\binom{n}{r} = C_n^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$C_n^1 = n = C_n^{n-1}$$

$$C_n^r = C_n^{n-r}$$

$$C_{n+1}^{r+1} = C_n^r + C_n^{r+1}$$

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

9. Combinaison

Propriétés des combinaisons : $\binom{n}{r} = C_n^r = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$

$C_n^0 = C_n^n = 1 \longrightarrow C_n^0 = \dfrac{n!}{0!\,(n-0)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1 \qquad C_n^n = \dfrac{n!}{n!\,(n-n)!} = \dfrac{n!}{n!} = 1$

$C_n^1 = n = C_n^{n-1} \longrightarrow C_n^1 = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = \dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

4 !=4.3.2.1= 4.3 ! ; n!=n(n-1) !

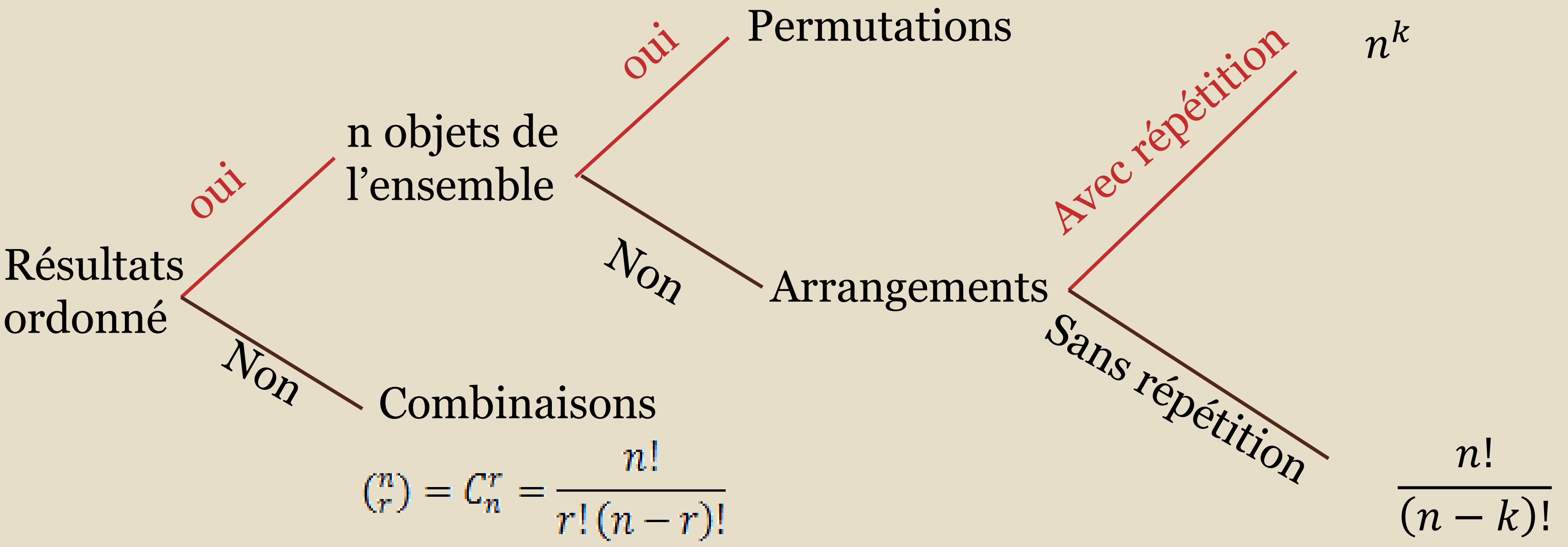
$C_n^{n-1} = \dfrac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = \dfrac{n!}{(n-1)!1!} = \dfrac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

$C_n^r = C_n^{n-r} \longrightarrow \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} = \dfrac{n!}{(n-r)!\,(n-(n-r)!} = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$

$C_{n+1}^{r+1} = C_n^r + C_n^{r+1} \longrightarrow$ On va démontrer à l'aide de triangle de pascal

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

9. Combinaison



10. coefficients binomiaux (ou développement du binôme de Newton)

les nombres définis par $\binom{n}{r} = C_n^r = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ sont appelés coefficients binomiaux parce qu'ils apparaissent au cours du développement du binôme de Newton.

Exemple. Calculer $\binom{25}{24}$ et $\binom{4}{2}$:

$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ et $\binom{n}{1} = n$ $\qquad \binom{25}{24} = \binom{25}{1} = 25$

$\binom{4}{2}$ En utilisant la formule de triangle de pascal $\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}$

$$\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 3 + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 3 + 2 + 1 = 6$$

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

10. coefficients binomiaux (ou développement du binôme de Newton)

Calcul des combinaisons à l'aide du triangle de Pascal

Exemple. Calculer $\binom{5}{3}$

n \ r	0	1	2	3	4	5
0	.					
1	.	.				
2	.	.	.			
3	.	.	.	.		
4	.	.	. +	.	.	
5	.	.	.	.	.	.

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

10. coefficients binomiaux (ou développement du binôme de Newton)

Calcul des combinaisons à l'aide du triangle de Pascal

Exemple. Calculer $\binom{5}{3}$

n \ r	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Chapitre 1. Ensembles et probabilités

10. coefficients binomiaux (ou développement du binôme de Newton)

$\binom{5}{3} = 10$

n \ r	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}$

$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}$