

# Chapitre 1 : Évaluation des titres à revenu fixe

## CONTRATS À REVENU FIXE

Pourquoi évaluer ?

- Obligation → Peut être revendu avant son échéance
- Emprunt → Peut être renégocié
- Rente viagère ...

## OBLIGATION

Titre de dette, émis par une société ou par l'Etat, avec les caractéristiques suivantes :

- Montant emprunté (nominal)
- Taux d'intérêt (taux nominal)
- Échéance (ou maturité)
- Prix d'émission (qui peut différer du nominal)
- Valeur de remboursement (qui peut différer du nominal)
- Modalité de paiement des intérêts (coupons) : une fois par an, in fine
- Modalité de remboursement du capital : amortissement constant, annuités constantes, in fine

Évaluation et comparaison difficile en raison des innovations qui ont touché toutes les caractéristiques :

- Les primes d'émission
- Les primes de remboursement
- et les dates de jouissance

Dans ces conditions, le tx nominal ou facial de coupon n'est qu'apparent, il ignore des éléments tels les primes, la périodicité des versements et la fluctuation des tx d'intérêt...

## Taux Actuariel

= le montant du placement à la somme actualisée des revenus qu'elle génère. Le taux tel que la somme actualisée des intérêts et du remboursement = la valeur d'émission des titres, il n'est d'ailleurs rien que le taux facial lorsqu'il n'existe ni prime d'émission ni prime de remboursement, et, lorsque les dates de jouissance et de remboursement sont confondues

## ÉVALUATION D'UNE OBLIGATION

Quand le taux monte, le cours des obligations ordinaires (« à coupons ») baisse, et inversement.

- Explication en termes de Valeur Actuelle
- Explication en terme de bon sens

$$V_0 = \text{Intérêt} \times \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} + VN \times (1+i)^{-n}$$

## RISQUE DE PLACEMENT DS DES ACTIFS À REVENU FIXE

- Risque de défaut : existe si l'entité émettrice du titre en question ne peut pas faire face aux échéances, soit à cause d'une faillite, soit des difficultés financières. N'existe pas pour les sociétés ayant la garantie de l'Etat ce qui justifie, entre autres, leur taux relativement faible. Est également négligeable pour les grandes Ese performantes
- Risque de taux : est lié à sa variabilité. Ainsi, la hausse des taux d'intérêt en vigueur pour les instruments de même maturité entraîne une baisse des cours des obligations et la baisse des taux entraîne une hausse des cours des obligations

## DURATION D'UNE OBLIGATION

La durée d'une obligation constitue une mesure plus précise de la vie d'une obligation que son échéance. Contrairement à l'échéance qui ne tient en compte que la date où aura lieu le paiement final, la durée prend également en considération l'importance des versements d'intérêts et le moment où ses derniers auront lieu.

## DURATION D'UNE OBLIGATION

$$D = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{FM_t(t)}{(1+i)^t}}{\sum_{t=1}^n \frac{FM_t}{(1+i)^t}}$$

Suite →  $D = \frac{\sum_{t=1}^n \frac{FM_t(t)}{(1+i)^t}}{V}$  (prix de l'oblg.)

Sensibilité d'une obligation  $V = \frac{-D}{(1+r)} dr$

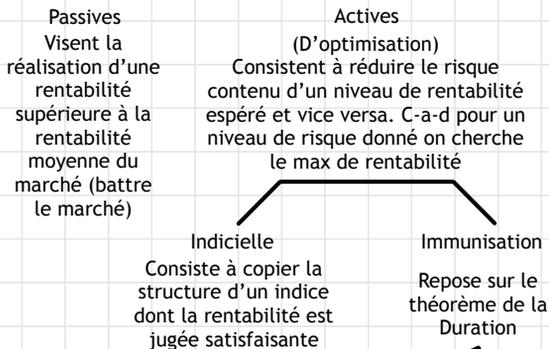
## DURATION D'UN PORTEFEUILLE D'OBLIGATIONS

$$D = \frac{\sum_{t=1}^n V_i D_i}{\sum_{t=1}^n V_i}$$

## DURÉE ET IMMUNISATION

L'immunisation est un procédé permettant à l'investisseur de réaliser un rendement spécifique dans une période où les taux intérêts fluctuent

## STRATÉGIES DE GESTION DES PF A RF

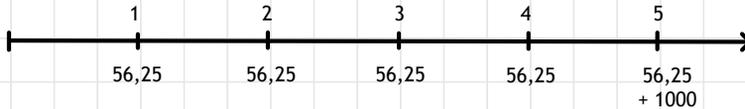


- Stratégie de détention de pf obligataire (Buy and Hold)
- Stratégie de gestion indicielle (Indexing)

# ▲ Évaluation d'une obligation

Emission d'un emprunt obligataire avec les caractéristiques suivantes

- Nominal 1000 dh
- Taux nominal 5,625%
- Échéance 5 ans
- Paiement des coupons chaque année
- Remboursement à l'échéance



HYPOTHÈSE 1 : Si le taux du marché obligataire est à 5,625% :  $VA = 1027,06$

$$\begin{aligned}
 VA &= \frac{56,25}{1 + 5,625\%} + \frac{56,25}{(1 + 5,625\%)^2} + \dots + \frac{56,25}{(1 + 5,625\%)^5} + \frac{1000}{(1 + 5,625\%)^5} \\
 &= \left[ 56,25 \cdot \sum_{k=1}^5 \frac{1}{(1 + 5,625\%)^k} \right] + \frac{1000}{(1 + 5,625\%)^5} \\
 &= 56,25 \cdot \frac{1 - (1 + 5,625\%)^{-5}}{5,625\%} + \frac{1000}{(1 + 5,625\%)^5} = ?
 \end{aligned}$$

HYPOTHÈSE 2 : Si le taux du marché obligataire passé à 6%, comment va évoluer la valeur actuelle de l'obligation ?  $VA = 984,2$

$$\begin{aligned}
 VA &= \frac{56,25}{1 + 6\%} + \frac{56,25}{(1 + 6\%)^2} + \dots + \frac{56,25}{(1 + 6\%)^5} + \frac{1000}{(1 + 6\%)^5} \\
 &= \left[ 56,25 \cdot \sum_{k=1}^5 \frac{1}{(1 + 6\%)^k} \right] + \frac{1000}{(1 + 6\%)^5} \\
 &= 56,25 \cdot \frac{1 - (1 + 6\%)^{-5}}{6\%} + \frac{1000}{(1 + 6\%)^5} = ?
 \end{aligned}$$

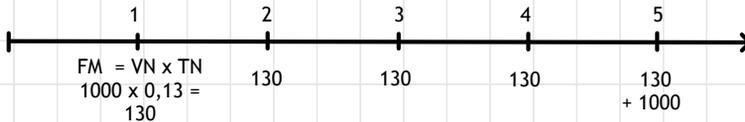
HYPOTHÈSE 3 : Le taux passe à 5% , VA sera supérieur à 1000



# Duration d'une obligation

Soit une obligation de 1000 Dh de nominal remboursable in fine dans 5 ans, ayant un taux facial de 13%, alors que le taux de rendement requis sur un tel actif aujourd'hui est de 12%

Autrement : VN = 1000 dh , TN = 13% , E = 5 ans



$$D = \frac{\frac{130 \times 1}{(1,12)^1} + \frac{130 \times 2}{(1,12)^2} + \frac{130 \times 3}{(1,12)^3} + \frac{130 \times 4}{(1,12)^4} + \frac{130 \times 5}{(1,12)^5} + \frac{1000 \times 5}{(1,12)^5}}{\frac{130}{(1,12)^1} + \frac{130}{(1,12)^2} + \frac{130}{(1,12)^3} + \frac{130}{(1,12)^4} + \frac{130}{(1,12)^5} + \frac{1000}{(1,12)^5}}$$

$$\text{Soit } D = \frac{(130 \times \sum_{k=1}^5 \frac{k}{(1,12)^k}) + \frac{1000 \times 5}{(1,12)^5}}{(\sum_{k=1}^5 \frac{1}{(1,12)^k}) + \frac{1000}{(1,12)^5}}$$

D = 3,9934 années  
Échéance : 5ans  
Duration : un peu près 4ans

Autrement :

Années	Coupons	Coeff d'actua- lisation 12%	Valeur actuelle	Pondération	VA pondérée
1	130	0,8929	116,077	x1	116,077
2	130	0,7972	103,636	x2	207,272
3	130	0,7118	92,534	x3	277,602
4	130	0,6355	82,615	x4	330,460
5	1130	0,5674	641,190	x5	3205,960
			1034,056		4137,371

## INTERPRÉTATION :

Si je garde ce titre pendant 4 ans, quel que soit la variation du taux, je réalise 12%



## Duration d'une obligation 2

Soit une obligation possédant les caractéristiques suivantes :

VN : 1000

E = 5 ans

Taux du coupon annuel = 10%

Taux de rendement à l'échéance = 20%

Le coupon correspond au taux d'intérêt payé par l'émetteur pour le placement concerné, basé sur la valeur nominale. Le taux de rendement est basé sur la valeur marchande actuelle de l'obligation

→ La valeur de l'obligation V

$$V = 100 \times \frac{1 - (1+20\%)^5}{20\%} + 1000 \times (1+20\%)^{-5} = 700,94$$

→ Durée de l'obligation

$$D = \frac{\frac{100 \times 1}{(1,20)^1} + \frac{100 \times 2}{(1,20)^2} + \frac{100 \times 3}{(1,20)^3} + \frac{100 \times 4}{(1,20)^4} + \frac{100 \times 5}{(1,20)^5} + \frac{1000 \times 5}{(1,20)^5}}{700,94} = 3,99 \text{ ans}$$

→ Supposons qu'un investisseur achète cette obligation et que le taux d'intérêt passe de 20% à 15% immédiatement après l'acquisition. Quel est le taux de rentabilité annuel que l'investisseur va réaliser s'il détient cette obligation jusqu'à l'échéance ?

Au taux de 15%, la valeur acquise par l'investisseur sera :

$$100 \times (1,15)^4 + 100 \times (1,15)^3 + 100 \times (1,15)^2 + 1100 = 1674,24$$

Or l'investisseur a investi 700,94 et donc  $700,94 \times (1+t)^5 = 1674,24$

$$t = 19,02 \%$$

→ Supposant que l'investisseur achète cette obligation avec l'intention de la céder au bout de 4ans. Quel est le taux qu'il va réaliser ?

$$100 \times (1,15)^3 + 100 \times (1,15)^2 + 100 \times (1,15)^1 + 100 + 100 \times (1,15)^1 + 1000 \times (1,15)^1 = 1455,86$$

$$700,94 \times (1+t) = 1455,86$$

$$t = 20,04 \%$$



## Duration d'un portefeuille d'obligations

Soit un portefeuille composé de 3 obligations dont les caractéristiques sont :

Obligation 1 : Durée de 5 ans et une valeur de 960

Obligation 2 : Durée de 7 ans et une valeur de 1000

Obligation 3 : Durée de 9 ans et une valeur de 1030

Quelle est la Duration du portefeuille ?

$$D = \frac{960 \times 5 + 1000 \times 7 + 1030 \times 9}{960 + 1000 + 1030} = 7,04 \quad \text{Soit 7 ans}$$

## Les stratégies indicielles

Un investisseur dispose de 15 000 Dh, qu'il souhaite gérer de façon indicielle, alors que la capitalisation boursière de référence est égal à 1 000 000 Dh.

Au jour J et J+N, l'indice de référence vaut :

Jour	Titres composant l'indice	Obl 1	Obl 2	Obl 3
Jour J	Nombre de titres cotés	300	400	300
	Cours	1050	1075	980
Jour J+N	Nombre de titres cotés	300	400	300
	Cours	1065	1077	1005

- Pour appliquer la stratégie indicielle, il s'agit tt d'abord de calculer la valeur de l'indice au jour J ensuite de trouver la structure de cet indice pour la dupliquer

$$I_j = \frac{300 \times 1050 + 400 \times 1075 + 300 \times 980}{1\ 000\ 000} = 1,039$$

- Il faut chercher le poids de chacun des titres dans l'indice

La proportion de la capitalisation boursière représentée par chaque titre est :

$$\text{La proportion de A est } \frac{300 \times 1050}{1\ 000\ 000 \times 1,039} \times 100 = 30,32 \%$$

De la même façon on trouve les proportions suivantes :

Titres	A	B	C
%	30,32	41,38	28,30

On en déduit que le nombre de titres à détenir en portefeuille au jour J est de :

$$30,32\% \times 15\ 000 / 1050 = 4,33 \text{ titres A}$$

$$41,38\% \times 15\ 000 / 1075 = 5,77 \text{ titres B}$$

$$28,30\% \times 15\ 000 / 980 = 4,33 \text{ titres C}$$

En J+N on suppose que le portefeuille a changé de valeur, il vaut 15 500. Quelle est la nouvelle structure du portefeuille ?

Le nombre des titres que l'investisseur doit détenir pour bien dupliquer l'indice retenu est :

$$I_{j+n} = \frac{300 \times 1065 + 400 \times 1077 + 300 \times 1005}{1\,000\,000} = 1,0518$$

Compte tenu du nouvel indice, les proportions des titres à détenir deviendront :

Titres	A	B	C
%	30,37	40,95	28,68

Ce qui fait que l'investisseur prenant compte de l'évolution de l'indice modifier la composition de son portefeuille

$$30,37\% \times 15\,000 / 1065 = 4,42 \text{ titres A} - 5,89 \text{ titres B} - 4,42 \text{ titres C}$$

L'investisseur doit donc vendre 0,09 titres A, acheter 0,12 titres B et 0,09 titres C



# Les stratégies d'immunisation

Un investisseur désire immuniser pendant 3 ans une somme placée de 1 000 000 dh dans l'achat d'un portefeuille d'obligations composé de 2 types d'obligations n° 1 et n° 2

1e info : les deux obligations ont une valeur nominale de 1000 Dh et sont remboursables in fine

2e info : le taux actuariel sur le marché est de 12%

3e info : les caractéristiques des obligations sont les suivantes :

Obligations	N° 1	N° 2
Taux nominal	11%	13%
Maturité	3 ans	5 ans

La structure du portefeuille au début de la première année

→ Calcul de chaque titre

- Obligation N° 1 : VN = 1000 dh , TN = 11% , E = 3 ans , Taux de rendement = 12%

$$V_0 = 1000 \times 11\% \times \frac{1 - (1+12\%)^{-3}}{12\%} + 1000 \times (1+12\%)^{-3} = 975,987$$

- Obligation N° 2 : VN = 1000 dh , TN = 13% , E = 3 ans , Taux de rendement = 12%

$$V_0 = 1000 \times 13\% \times \frac{1 - (1+12\%)^{-5}}{12\%} + 1000 \times (1+12\%)^{-5} = 1036,05$$

→ Calcul de la Duration de chaque titre

$$\bullet \text{ Obligation N° 1 : } D_1 = \frac{\frac{110 \times 1}{(1,12)^1} + \frac{110 \times 2}{(1,12)^2} + \frac{110 \times 3}{(1,12)^3} + \frac{1000 \times 3}{(1,12)^3}}{975,98} = 2,71$$

$$\bullet \text{ Obligation N° 2 : } D_2 = \frac{\frac{130 \times 1}{(1,12)^1} + \frac{130 \times 2}{(1,12)^2} + \dots + \frac{130 \times 5}{(1,12)^5} + \frac{1000 \times 5}{(1,12)^5}}{1036,05} = 3,99$$

Obligations	N° 1	N° 2
Valeur Nominale	1000 dh	1000 dh
Taux nominal	11%	13%
Maturité	3 ans	5 ans
Cours	957,987	1036,052
Duration	2,71	3,99

→ Calcul des proportions des titres dans le portefeuille  
Ici, on doit égaliser la durée du portefeuille avec l'horizon d'investissement.  
Soit  $w_1$  et  $w_2$  les proportions des obligations N° 1 et N° 2 dans le portefeuille d'obligations à constituer

$$w_1 \cdot d_1 + w_2 \cdot d_2 = 3 \quad \text{Tel que} \quad w_1 + w_2 = 1 \quad \text{Donc} \quad w_2 = 1 - w_1$$

Alors :

$$w_1 \cdot d_1 + (1 - w_1) \cdot d_2 = 3$$

$$w_1 \cdot d_1 + d_2 - w_1 \cdot d_2 = 3$$

$$w_1(d_1 - d_2) + d_2 = 3$$

$$w_1 = (3 - d_2) / (d_1 - d_2)$$

$$w_1 = (3 - 3,99) / (2,71 - 3,99)$$

$$w_1 = 0,7734$$

Et donc :

$$w_2 = 1 - 0,7734$$

$$w_2 = 0,2266$$

L'investisseur doit acheter

$$\frac{1\,000\,000 \times 0,7734}{957,98} = 792,43 \quad \text{Obligations N° 1}$$

$$\frac{1\,000\,000 \times 0,2266}{1036,05} = 218,71 \quad \text{Obligations N° 2}$$

La valeur acquise à la fin de la première année :

Le coupon procuré par :

- Obligation N° 1 :  $1000 \times 11\% = 110$  dh
- Obligation N° 2 :  $1000 \times 13\% = 130$  dh

Et donc l'intérêt total procuré est :

$$792,42 \times 110 = 87\,167,30 \text{ dh}$$

$$218,71 \times 130 = 28\,432,30 \text{ dh}$$

Soit le total de 115 599,6 dh

Un an plus tard, le taux actuariel chute à 11%

Pour l'obligation N° 1 :

$$V_0 = 110 \times \frac{1 - (1+11\%)^{-2}}{11\%} + 1000 \times (1+11\%)^{-2} = 1000$$

$$D_1 = \frac{\frac{110 \times 1}{(1,11)} + \frac{110 \times 2}{(1,11)^2} + \frac{110 \times 3}{(1,11)^3}}{1000} = 1,9$$

De même pour l'obligation N° 2, on trouve :  $V = 1062,05$  et  $D = 3,38$

Obligations	N° 1	N° 2
Maturité	2 ans	4 ans
Valeur actuelle	1000	1062,05
duration	1,9	3,38

$$\begin{aligned} \text{Capitalisation } 792,43 \times 1000 &= 792\,430 \\ &+ 218,71 \times 1062,05 = 232\,280,95 \end{aligned}$$

$$\text{Coupons} = 115\,599,60$$

$$\text{Soit un total de} = 1\,140\,310,55 \text{ Dh}$$

Maintenant l'objectif est d'avoir une Duration = 2

$$w_1 \cdot d_1 + w_2 \cdot d_2 = 2$$

$$1,9 \cdot w_1 + 3,38 \cdot (1-w_1) = 2$$

$$w_1 = 0,9324$$

$$w_2 = 0,0676$$

Donc l'investisseur doit posséder

$$1140310,55 \times 0,9324 / 1000 = 1063,22 \text{ obligations N° 1}$$

Ce qui fait qu'il doit acheter 270,79 obligations (1063,22 - 792,43)

$$1140310,55 \times 0,0676 / 1062,5 = 72,58 \text{ obligations N° 2}$$

Ce qui fait qu'il doit vendre 146,13 obligations (72,58 - 218,71)

Obligations	N° 1	N° 2
Maturité	1 an	3 ans
Cours	1009,1	1074,59
duration	1	2,68

Coupons : 126 389,60

Capital :  $1063,22 \times 1009,1 = 1\,072\,895$

$72,58 \times 1074,59 = 77993,74$

Soit un total de 1 277 278,64

L'objectif est d'avoir une Duration = 1

Le taux tombe à 10%

$$w1.d1 + w2.d2 = 1$$

$$w1.d1 + (1-w1).d2 = 1$$

$$w1 + (1-w1).2,68 = 1$$

$$w1 = 1$$

$$w2 = 0$$

Donc l'investisseur doit posséder :  $1\,277\,278,64 \times 1 / 1009,1 = 1265,76$

Ce qui fait qu'il doit acheter 202,54 obligations N° 1 et vendre 72,58 obligations N° 2

A la fin de la période 3

Coupons :  $1265,76 \times 110 = 139\,233,6$

Remboursement des obligations  $1000 \times 1265,76 = 1\,265\,760$

Soit un total de : 1 404 993,60

Le placement aurait procuré  $1\,000\,000 (1,12)^3 = 1\,404\,928$  soit un écart de 65,6 ( $1\,404\,993,6 - 1\,404\,928$ ), ce qui représente une couverture de 99,99%