

Programmation Linéaire

Correction de l'exercice I

1. Faisons un tableau pour résumer les contraintes du gérant de l'hôtel :

	Lot A	Lot B	Contraintes
	x	y	
Draps	2	3	≥ 90
Serviettes	4	12	≥ 240
Gants de toilette	8	6	≥ 240
Prix du lot	200	400	$200x + 400y$

Comme x et y doivent être positifs, l'ensemble des contraintes du gérant peuvent alors s'écrire:

$$(C) \begin{cases} x \text{ et } y \geq 0 \\ 2x + 3y \geq 90 \\ 4x + 12y \geq 240 \\ 8x + 6y \geq 240 \end{cases}$$

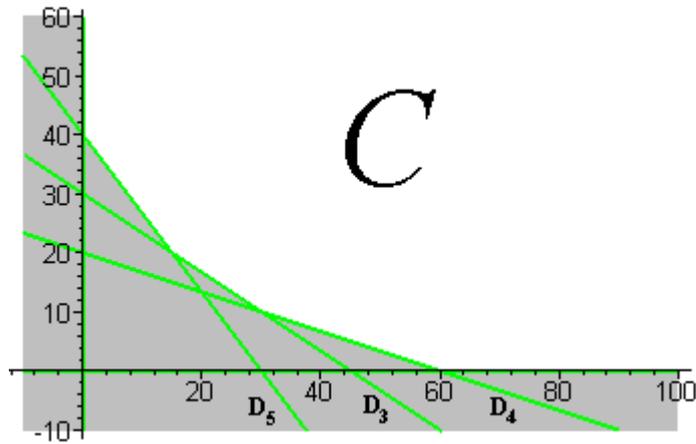
Le système dont on demande la représentation graphique est le système précédent après simplification :

$$\begin{cases} x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ 2x + 3y \geq 90 \\ x + 3y \geq 60 \\ 4x + 3y \geq 120 \end{cases}$$

2. Considérons les droites suivantes:

- D_1 d'équation " $x = 0$ "
- D_2 d'équation " $y = 0$ "
- D_3 d'équation " $2x + 3y = 90$ "
- D_4 d'équation " $x + 3y = 60$ "
- D_5 d'équation " $4x + 3y = 120$ "

La représentation graphique de ce système donne alors :



3.

- a. Comme le prix d'un lot A est de 200DH et que le prix d'un lot B est de 400DH, le prix total pour x lots A et y lots B est :

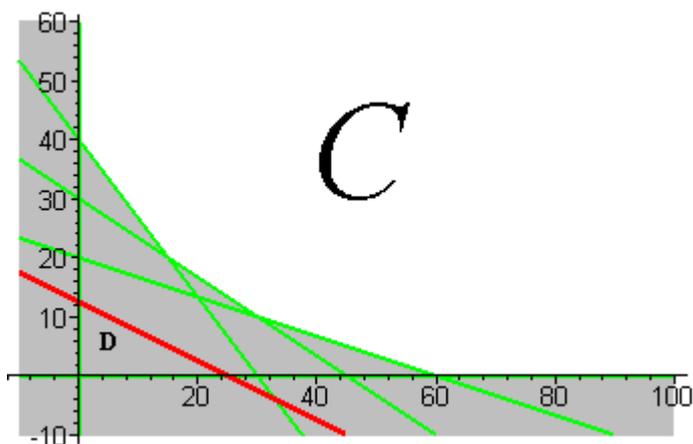
$$(200x + 400y) \text{ DH}$$

La dépense est donc : $D(x, y) = 200x + 400y$.

- b. On peut savoir simplement s'il est possible de procéder aux achats nécessaires avec 5000 DH en traçant sur la figure précédente la droite D d'équation :

$$D : 200x + 400y = 5000$$

On obtient alors la figure suivante :



On constate alors que cette droite n'a aucun point commun avec le polygone des contraintes.

Il n'est donc pas possible de procéder aux achats avec 5 000 DH.

4. Pour une dépense de N DH, les choix de x lots A et y lots B correspondent aux points de la droite D_N d'équation :

$$D_N : 200x + 400y = N$$

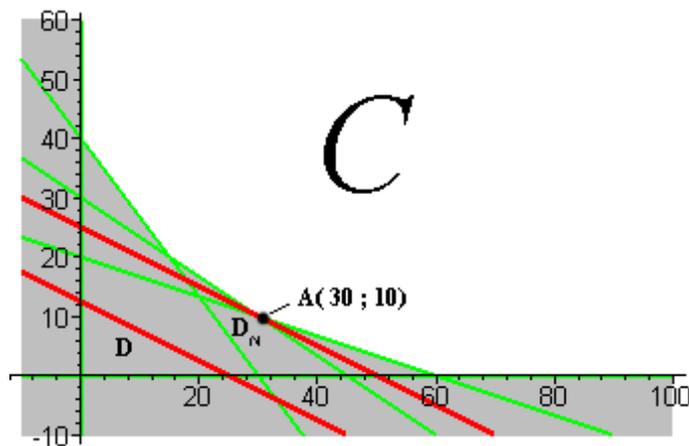
Pour N quelconque, cette droite est parallèle à la droite D .

On remarque que pour $N = 0$, la droite D_N passe par l'origine du repère et est située à gauche de D .

Donc, la valeur de N sera d'autant plus grande que la droite D_N sera éloignée et à droite de D .

On cherche donc la droite D_N parallèle à D , ayant des points communs avec (C) et la plus proche possible de D .

Graphiquement, on voit alors que c'est la droite passant par le point A d'intersection des droites D_3 et D_4 .



En utilisant les équations de D_3 et D_4 , on détermine alors les coordonnées du point A.

On trouve alors $A(30 ; 10)$.

La dépense minimale du gérant est donc de $(200 \cdot 30 + 400 \cdot 10)$ DH, c'est à dire

**Dépense minimale = 10 000 DH
obtenue pour 30 lots A et 10 lots B**

Pour finir, on peut aussi préciser que le gérant, pour cette dépense aura :

- 90 draps de bain,
- 240 serviettes,
- 300 gants de toilettes.