STATISTIQUE APPLIQUEE

Chap. IV : Test d’hypothèses

Rachid MCHICH

Pour faire un test d'hypothèses, on commence par faire une hypothèse sur un paramètre de la population considérée.

Cette hypothèse est appelée: hypothèse nulle et est notée : $H_{0.}$

On définit ensuite une autre hypothèse appelée: hypothèse alternative, notée : H_a.

La procédure de test consiste à utiliser les données issues d'un échantillon pour tester les deux assertions en compétition : H_0 et H_a.

Les tests d'hypothèses peuvent concerner deux paramètres d'une population: la **moyenne** et la **proportion**.

I. Hypothèses nulle et alternative

<u>Exemple 1 :</u> Pour évaluer les performances d'un nouveau moteur, plusieurs prototypes ont été construits et le groupe de recherche tente à prouver que le nouveau moteur augmente en moyenne le nombre de kilomètres effectués avec un litre de carburant; d'où :

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu \leq 24 \\ H_a &: \quad \mu > 24 \end{aligned}$$

Test unilatéral supérieur

Exemple 2 : Un producteur de boissons gazeuses affirme que les bouteilles de 2 litres contiennent en moyenne, au moins 2,028. Un échantillon de bouteilles est sélectionné et leur contenance est évaluée par une commission de contrôle; d'où :

$$H_0 : \quad \mu \geq 2{,}028$$
$$H_a : \quad \mu < 2{,}028$$

Test unilatéral inférieur

Exemple 3 : En contrôle de qualité, un agent n'acceptera une pièce d'un échantillon de pièces que si elle a une longueur de 2 cm exactement; d'où :

$$H_0 : \quad \mu = 2$$
$$H_a : \quad \mu \neq 2$$

Test bilatéral

II . Erreurs de 1ère et de 2nde espèce :

		Condition sur la population	
		H_0 vraie	H_a vraie
Conclusion	Accepter H_0	Conclusion correcte	Erreur de 2nde espèce
	Rejeter H_0	Erreur de 1ère espèce	Conclusion correcte

Seuil de signification :

Le seuil de signification est la probabilité de faire une erreur de 1ère espèce lorsque l'hypothèse nulle est vraie et satisfaite avec égalité.

Remarque : La plupart des tests d'hypothèses contrôlent la probabilité de commettre une erreur de 1ère espèce et sont appelés : *tests de signification*.

La probabilité de commettre une erreur de 2nde espèce n'est très souvent pas contrôlée. Par conséquent si nous décidons d'accepter H_0, nous ne pouvons pas déterminer le degré de confiance que nous pouvons avoir dans cette décision.

Il est alors recommandé d'utiliser « ne pas rejeter H_0 » au lieu de « accepter H_0 ».

III. Moyenne d'une population : σ connu

Rappelons que le seuil de signification est la probabilité de faire une erreur de 1ère espèce lorsque l'hypothèse nulle est vraie et satisfaite avec égalité.

Notons aussi que l'erreur type de $\bar{x}$ correspond à l'écart type de la distribution d'échantillonnage de $\bar{x}$:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Pour effectuer des tests d'hypothèses relatifs à la moyenne d'une population dans le cas σ connu, nous utilisons la variable aléatoire centrée réduite z comme statistique de test pour déterminer si $\bar{x}$ s'écarte suffisamment de la valeur hypothétique de μ pour entraîner le rejet de l'hypothèse nulle :

Statistique de test pour des tests d'hypothèses relatifs à la moyenne de la population : σ connu

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Tests d'hypothèses relatifs à la moyenne d'une population : cas où σ est connu

	Test unilatéral inférieur	Test unilatéral supérieur	Test bilatéral
Hypothèses	$H_0: \quad \mu \geq \mu_0$ $H_a: \quad \mu < \mu_0$	$H_0: \quad \mu \leq \mu_0$ $H_a: \quad \mu > \mu_0$	$H_0: \quad \mu = \mu_0$ $H_a: \quad \mu \neq \mu_0$
Statistique de test	$z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	$z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	$z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$
Règle de rejet : approche par la valeur p	Rejet de H_0 si $p \leq \alpha$	Rejet de H_0 si $p \leq \alpha$	Rejet de H_0 si $p \leq \alpha$
Règle de rejet : approche par la valeur critique	Rejet de H_0 si $z \leq -z_\alpha$	Rejet de H_0 si $z \geq z_\alpha$	Rejet de H_0 si $z \leq -z_{\alpha/2}$ ou $z \geq z_{\alpha/2}$

Tests d'hypothèses relatifs à la moyenne d'une population : cas où σ est inconnu

	Test unilatéral inférieur	Test unilatéral supérieur	Test bilatéral
Hypothèses	$H_0: \quad \mu \geq \mu_0$ $H_a: \quad \mu < \mu_0$	$H_0: \quad \mu \leq \mu_0$ $H_a: \quad \mu > \mu_0$	$H_0: \quad \mu = \mu_0$ $H_a: \quad \mu \neq \mu_0$
Statistique de test	$t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$	$t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$	$t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$
Règle de rejet : approche par la valeur p	Rejet de H_0 si $p \leq \alpha$	Rejet de H_0 si $p \leq \alpha$	Rejet de H_0 si $p \leq \alpha$
Règle de rejet : approche par la valeur critique	Rejet de H_0 si $t \leq -t_\alpha$	Rejet de H_0 si $t \geq t_\alpha$	Rejet de H_0 si $t \leq -t_{\alpha/2}$ ou $t \geq t_{\alpha/2}$

Distribution de Student avec (n-1) ddl

Tests d'hypothèses relatifs à la proportion d'une population

	Test unilatéral inférieur	Test unilatéral supérieur	Test bilatéral
Hypothèses	$H_0: \quad p \geq p_0$ $H_a: \quad p < p_0$	$H_0: \quad p \leq p_0$ $H_a: \quad p > p_0$	$H_0: \quad p = p_0$ $H_a: \quad p \neq p_0$
Statistique de test	$z = \dfrac{\overline{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	$z = \dfrac{\overline{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	$z = \dfrac{\overline{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$
Règle de rejet : approche par la valeur p	Rejet de H_0 si $p \leq \alpha$	Rejet de H_0 si $p \leq \alpha$	Rejet de H_0 si $p \leq \alpha$
Règle de rejet : approche par la valeur critique	Rejet de H_0 si $z \leq -z_\alpha$	Rejet de H_0 si $z \geq z_\alpha$	Rejet de H_0 si $z \leq -z_{\alpha/2}$ *ou* $z \geq z_{\alpha/2}$