



MATHEMATIQUES FINANCIERES

Rachid MCHICH

Chap. III : Annuités

I- Introduction - Définitions

II- Annuités constantes

II-1 De fin de période

II-2 De début de période

III- Annuités variables

III-1 En progression arithmétique

III-2 En progression géométrique

I- Définitions :

On appelle **annuités** des sommes d'argent payables à intervalles de temps réguliers, soit pour :

- constituer un capital ou un placement (annuités de placement ou de capitalisation)
- rembourser une dette (annuités de remboursement)
- ou acquérir un bien par amortissement (annuités d'amortissement).



Il existe une grande variété d'annuités: annuités constantes, annuités variables, annuités certaines (nombre d'annuités fixé et connu à l'avance), annuités viagères (nombre lié à la vie d'une personne et non connu d'avance), annuités perpétuelles (nombre illimité)...

Dans la suite de ce chapitre, on va s'intéresser aux annuités constantes et à certaines annuités variables.

II- Annuités constantes :

Deux cas sont à considérer selon que les versements s'effectuent en fin de période ou en début de période.

II-1 Annuités constantes de fin de période :

Considérons n versements de fin de période, d'un montant « a » chacun, au taux i . Alors, on a :

II-1-1 Valeur acquise :

Au bout de n versements, la valeur acquise est la somme des valeurs acquises des n versements. Elle est donnée par :

$$V_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

II-1-2 Valeur actuelle :

On prend maintenant le problème inverse. On recherche la valeur V_0 à l'origine; c.à.d. une période avant le versement de la 1^{ère} annuité. La valeur actuelle est donc la somme des valeurs actuelles des différentes annuités :

$$V_0 = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Exemples :

1. Quel est le capital constitué par 12 versements annuels de fin de période, de 2 000 dh chacun, au taux annuel de 4%?
2. Quelle est la valeur actuelle de 10 versements annuels de fin de période, de 3 000 dh chacun, au taux annuel de 6%?
3. Combien faut-il verser à la fin de chaque semestre, pendant 8 ans, pour constituer au moment du dernier versement un capital de 450 000 dh. Taux semestriel $t = 4,5\%$. (Capitalisation semestrielle).
4. Quelle somme d'argent peut-on emprunter si on s'engage à payer 10 trimestrialités d'un montant de 5 625 dh chaque trimestre? Le 1^{er} paiement étant effectué 3 mois après la remise des fonds. Taux annuel = 6%.

II-2 Annuités constantes de début de période :

II-2-1 Valeur acquise :

Pour le calcul de la valeur acquise, il faudra calculer le capital constitué à la date n ; c.à.d. une période après le dernier versement.

$$V_n = a(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

II-2-2 Valeur actuelle :

De manière analogue, la valeur actuelle V_0 à l'instant 0, est égale à la somme des valeurs actuelles de chacune des n annuités à l'instant 0. Ainsi, on a :

$$V_0 = a(1+i) \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

Exercice 10 :

Une personne place à la fin de chaque trimestre des sommes constantes de 8 000 dh chacune. Date du 1^{er} versement : 31/03/2004. Date du dernier versement : 31/12/2007. Taux annuel : 9 %. En utilisant les taux proportionnels, *calculer la valeur acquise* :

- Au 31/12/2007.
- Au 29/02/2008.

Exercice 11 :

Un particulier contracte un crédit d'un montant X auprès de sa banque. Cet emprunt est remboursable par trimestrialités constantes de 9 000 dh chacune et ceci pendant 6 ans. Sachant que le 1^{er} versement est payable un an après la date du contrat, *calculer la valeur actuelle X de la dette*. Taux annuel : 12,5 %. (Utiliser les taux proportionnels).

Exercice 12 :

- a) *Calculer la valeur acquise* par 10 annuités constantes de fin de période de 10 000 dh chacune, aux taux de capitalisation suivants :
- 4,5 % pour les 4 premières années
 - 5% pour les 6 dernières années
- b) *Calculer la valeur actuelle de ces mêmes annuités.*

III- Annuités variables

C'est le cas où les versements varient d'une période à une autre.

Dans ce paragraphe, on se limitera à deux types d'annuités variables : en progression arithmétique et en progression géométrique.

On se limitera aussi au cas des annuités de fin de période. Pour les annuités de début de période, il suffit d'introduire un décalage d'une période (c.à.d. multiplier par $(1 + i)$).

III-I En progression arithmétique:

Dans ce cas, la valeur acquise est donnée par :

$$V_n = \left(a + \frac{r}{i}\right) \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right) - \frac{nr}{i}$$

Et la valeur actuelle est donnée par :

$$V_0 = \left(a + \frac{r}{i}\right) \left(\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}\right) - \frac{nr}{i} (1+i)^{-n}$$

Exemple :

On constitue un capital par 12 versements annuels de fin de période, en augmentation arithmétique de 1 000 dh, et de premier terme $a = 10\ 000$ dh. Taux annuel $t = 6\%$.

- Quel est ce capital?
- Calculer la Valeur actuelle

III-2 En progression géométrique:

La valeur acquise est donnée par :

$$V_n = \begin{cases} a \frac{(1+i)^n - q^n}{(1+i) - q} & \text{si } (1+i) \neq q \\ na(1+i)^{n-1} & \text{si } (1+i) = q \end{cases}$$

La valeur actuelle est donnée par :

$$V_0 = \begin{cases} a \frac{1 - q^n (1+i)^{-n}}{(1+i) - q} & \text{si } (1+i) \neq q \\ \frac{na}{(1+i)} & \text{si } (1+i) = q \end{cases}$$

Exemples :

1. Calculer la valeur acquise et la valeur actuelle d'une suite de 10 annuités de fin de période, en augmentation de 7 % par an et de 1^{er} terme 22 000 dh. Taux annuel $t = 9 \%$.
2. Calculer la valeur acquise et la valeur actuelle d'une suite de 6 annuités de fin de période, en augmentation de 8 % par an et de 1^{er} terme 31 000 dh. Taux annuel $t = 8 \%$.