MATHEMATIQUES FINANCIERES

Rachid MCHICH

Chap. II : Intérêts composés

I- Principes de base – Valeur acquise

II- Taux équivalents et taux proportionnels

III- Valeur actuelle – Equivalence de capitaux - Échéance commune – Échéance moyenne

I- Principes de base – Valeur acquise

Pour un placement à intérêts simples, les intérêts ne portent pas sur une longue période ou sont retirés à la fin de chaque période de capitalisation.

A l'inverse, dans le principe des intérêts composés, ces derniers portent souvent sur une longue période et ne sont pas retirés à la fin de chaque période de capitalisation.

On dira que les sommes sont capitalisées, c.à.d. Les intérêts non retirés produisent eux aussi de nouveaux intérêts.

I-1 Exemple et définition :

Exemple : Soit un capital K = 10 000 dh, placé à 5%, pour une durée de 3 ans.

- A intérêts simples, la valeur acquise serait :

  V = 10 000 + (10 000*5*3)/100 = 11 500 dh.

- A intérêts composés, on obtient :

Période	Capital (dh)	Intérêts produits (dh)	Valeur acquise (dh)
1ère année	10 000	500	10 500
2ème année	10 500	525	11 025
3ème année	11 025	551,25	11 576,25

Définition :

Un placement est effectué à **intérêts composés** si, à la fin de chaque période, on réunit le capital et l'intérêt simple qu'il a produit, pour constituer le nouveau capital qui sera placé pendant la période suivante.

Remarque :

Pour le calcul des intérêts composés, on utilisera le taux pour un dirham, c.à.d. l'intérêt produit par 1 dh pendant une période.

Par exemple, si la période est d'un an et si le taux est $t = 6\%$, alors le taux pour un dirham est $i = 0{,}06$.

I-2 Calcul de la valeur acquise :

Soit un capital C_0, placé à un taux annuel i, pendant n années. Calculons la valeur acquise par ce placement :

Période	Capital	Intérêts	Valeur acquise
1ère année	C_0	C_0*i	$C_0+C_0*i=C_0(1+i)$
2ème année	$C_0(1+i)$	$C_0(1+i)i$	$C_0(1+i)(1+i)=C_0(1+i)^2$
3ème année	$C_0(1+i)^2$	$C_0(1+i)^2 i$	$C_0(1+i)^2(1+i)=C_0(1+i)^3$
…	…	…	…
nième année	$C_0(1+i)^{n-1}$	$C_0(1+i)^{n-1}.i$	$C_0(1+i)^{n-1}(1+i)=C_0(1+i)^n$

D'où la définition :

Définition :

La **valeur acquise** par un capital C_0 , placé à un taux annuel *i*, pendant *n* années, est donnée par:

$$V_n = C_0(1+i)^n$$

Exemple :

Calculons la valeur acquise par un capital $C_0=10\ 000$ *dh*, placé à un taux annuel de *5%*, pendant *3* années :

Remarque :

La formule de la valeur acquise des intérêts composés met en jeu 4 grandeurs. Ainsi, si on en connaît 3, on peut calculer la 4ème grandeur. En effet, on a :

$$V_n = C_0(1+i)^n$$

$$C_0 = V_n(1+i)^{-n}$$

$$i = \left(\frac{V_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$n = \frac{\ln\left(\frac{V_n}{C_0}\right)}{\ln(1+i)}$$

Exemples

1 *Calculer la valeur acquise par un capital de 10 000 dh, placé au taux annuel t=11,5% pour une période de 7 ans.*

1 *Calculer le capital qui, au taux de 2 % et au bout de 3 ans, est devenu 100 000 dh.*

1 *Un capital de 25 000 dh a généré une valeur acquise de 31 000 dh au bout de 5 ans.* Quel est le taux de ce placement ?

1 Un capital est placé à 4% à intérêts composés. *Au bout de combien de temps la valeur acquise sera-t-elle le double du capital?*

I-3 Valeur acquise pour une période de placement non entière :

Nous savons que : $V_n = C_0(1+i)^n \quad pour\ n \in IN$.

Maintenant, supposons que : $n \notin IN$ Par exemple, on fait un placement d'un capital C = 65 000 dh, à intérêts composés, pour une période de 6 ans et 9 mois, au taux annuel de 8%.

Le problème qui se pose ici est que la dernière année n'est pas entière. Dans ce cas, deux solutions sont possibles :

Solution rationnelle :

Dans ce cas, on va considérer que la valeur acquise au bout de 6 ans reste placée à intérêts simples pendant 9 mois. Ainsi, on obtient :

$$V_n = 65000(1+0,08)^6 + \frac{65000(1+0,08)^6 * 8 * 9}{1200} = 109335,64\,dh$$

Solution commerciale :

Dans ce cas, on considère tout simplement la valeur acquise pour des intérêts composés, mais pour un *n* non entier; c.à.d. :

$$V_n = 65000(1+0,08)^{6+\frac{9}{12}} = 109\,275,73\,dh$$

Remarques :

1. La solution commerciale est légèrement inférieure à la solution rationnelle.

2. La solution commerciale est la solution qui sera utilisée à chaque fois sauf indication contraire.

II- Taux équivalents et taux proportionnels

La formule de la valeur acquise à intérêts composés $V_n = C_0(1+i)^n$ suppose l'utilisation de la même échelle de temps pour le taux d'intérêt, le nombre de périodes ainsi que la capitalisation.

Ainsi, on peut avoir une capitalisation mensuelle (avec un taux mensuel et une période en mois), trimestrielle (taux trimestriel et période en trimestres), semestrielle, bimensuelle, annuelle …etc

Le problème se posera lorsque l'unité de temps utilisée pour le taux ne correspond pas à l'unité de temps utilisée pour la capitalisation. Il faudra alors calculer l'un des deux taux suivants:

II-1 Taux équivalents :

Définition: Deux **taux** sont **équivalents** lorsque, à intérêts composés, ils aboutissent, pour le même capital et la même période de placement, à la même valeur acquise.

Exemple : Soit un capital C_0, placé pendant un an, au taux annuel t = 10%. Calculons les taux mensuel, trimestriel ou semestriel équivalents:

$$C_0(1+i_a)^1 = C_0(1+i_m)^{12} \Rightarrow i_m = 0{,}0080 \Rightarrow t_m = 0{,}80\%$$

$$C_0(1+i_a)^1 = C_0(1+i_t)^4 \Rightarrow i_t = 0{,}0241 \Rightarrow t_t = 2{,}41\%$$

$$C_0(1+i_a)^1 = C_0(1+i_s)^2 \Rightarrow i_s = 0{,}0488 \Rightarrow t_s = 4{,}88\%$$

II-2 Taux proportionnels :

Définition : Deux **taux** sont **proportionnels** si leur rapport est égal au rapport des deux périodes de placement respectives.

Exemple : Calculons les taux proportionnels mensuel, trimestriel ou semestriel au taux annuel t = 10%.

$$Puisque \quad t_a = 10\% \quad alors:$$

$$\begin{cases} t_s = 5\% \\ t_t = 2,5\% \\ t_m = 0,83\% \end{cases}$$

III- Valeur actuelle – Equivalence de capitaux - Échéance commune– Échéance moyenne

III-1 Définition et Exemple :

Définition: La **valeur actuelle** d'un capital *C* est la somme qu'il faut placer maintenant, à intérêts composés, pendant n années, à un certain taux *i*, pour obtenir *C*.

Autrement dit, il s'agit de déterminer la valeur d'un capital *n* années avant son placement.

Cette valeur actuelle est donnée par :

$$V_0 = C(1+i)^{-n}$$

Exemple :

Quelle somme d'argent faut-il placer maintenant, à intérêts composés, au taux annuel de 7% pour obtenir 250 000 dh dans 4 ans.

Remarque :

Quand on calcule la valeur acquise d'un capital C, placé à un taux t, pendant n années, on parle alors de capitalisation.

Le calcul de la valeur actuelle est l'opération inverse d'une capitalisation. On parle alors d'actualisation.

III-2 Equivalence de deux capitaux :

Définition: Deux capitaux C_1 et C_2 sont **équivalents**, à un taux donné i et à une date donnée (date d'équivalence) si, à cette date, ils ont la même valeur actuelle; c.à.d. :

$$C_1(1+i)^{-n_1} = C_2(1+i)^{-n_2}$$

En général, un capital C est **équivalent** à plusieurs autres capitaux si, à une date donnée, la valeur actuelle de C est égale à la somme des valeurs actuelles des autres capitaux; c.à.d. :

$$C(1+i)^{-n} = C_1(1+i)^{-n_1} + C_2(1+i)^{-n_2} + \ldots + C_k(1+i)^{-n_k}$$

III-3 Échéance commune et échéance moyenne:

Définition :

- Lorsqu'un capital unique est équivalent à plusieurs autres capitaux, alors la date d'échéance du capital unique est appelée : date d'**échéance commune**.

- L'**échéance** **moyenne** de plusieurs capitaux est l'échéance commune d'un capital égal à la somme des autres capitaux.