



# MATHEMATIQUES FINANCIERES

**Rachid MCHICH**

# Chap. I: Intérêts simples – Escompte commercial

## I- Introduction

## II- Intérêts simples:

- Définitions – Calcul pratique
- Valeur acquise - Taux moyen
- Application aux comptes courants et d'intérêts (Méthode hambourgeoise)
- Intérêt précompté - Taux effectif

### III- Escompte commercial

- Exemple introductif – Définitions
- Effets équivalents
- Échéance commune
- Échéance moyenne

# Chap. I: Intérêts simples – Escompte commercial

## **I- Introduction:**



On peut définir globalement les mathématiques financières «comme l'application des mathématiques aux opérations financières non instantanées (c'est-à-dire faisant intervenir le temps) »



Les opérations financières sont essentiellement basées sur la notion de prêt (d'emprunt ou de placement), née de l'engagement pris par un emprunteur de rembourser à terme une somme d'argent (**capital**) à son créancier (**prêteur**). Ce service est rémunéré sous forme d'intérêts.



Dans ce chapitre, on va s'intéresser aux intérêts simples dont le principe, comme leur nom l'indique, est simple.

# II- Intérêts simples

## II-I Définitions :

**Exemple introductif :** Soient deux personnes A et B. On suppose que A prête de l'argent à B. En retour de ce service, B verse un loyer.

On dit que A a fait un placement (prêt) et que B a contracté un emprunt.

La somme d'argent prêtée par A est appelée un **capital**, et le loyer perçu est appelé **intérêt**.

Le prêt ou le placement a une certaine durée pendant laquelle l'intérêt est versé au prêteur.

## Définition 1 :

Dans une relation de prêteur à emprunteur, le **Capital** désigne la somme qui est prêtée par le prêteur, somme qui devra lui être restituée à la fin de la période de prêt.

Ce prêt se fait en général moyennant un **Intérêt** qui est une compensation que l'emprunteur paye au prêteur en dédommagement de ce prêt.

**Définition 2** : Le taux d'intérêt est la fraction du capital qui devra être versée à la fin de la période de prêt en dédommagement du prêt du capital.

Par exemple, si le placement de 100 dh nous rapporte 108 dh, alors le taux d'intérêt est de 8 dh pour 100 dh, ou encore  $t = 8\%$ .

## Remarques :

- I. Tout prêt d'argent fait l'objet d'un contrat dont les clauses définissent les modalités du prêt : capital, durée, taux d'intérêt, ....etc
- I. L'intérêt simple possède 2 propriétés essentielles : il est proportionnel au capital et il est proportionnel à la durée de placement.

- 
3. Un intérêt simple est généralement utilisé pour les placements à court terme, tandis que les intérêts composés sont utilisés pour les placements à long terme.
  4. Dans le cas de l'intérêt simple, le capital reste invariant pendant toute la durée. L'emprunteur doit verser à la fin de chaque période l'intérêt dû.

## II-2 Calcul pratique :

Soient  $C$  un capital placé,  $t$  le taux d'intérêt annuel et  $n$  la période de placement (en années).

Alors, l'intérêt global rapporté par ce placement est donné par :

$$I = \frac{C * t * n}{100}$$

Ainsi, l'intérêt généré pour différentes périodes de placement est donné par :

| Pour $n$ années             | Pour $m$ mois                | Pour $j$ jours                | Pour $q$ quinzaines          |
|-----------------------------|------------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| $I = \frac{C * t * n}{100}$ | $I = \frac{C * t * m}{1200}$ | $I = \frac{C * t * j}{36000}$ | $I = \frac{C * t * q}{2400}$ |

## Remarques :

1. Les relations ci-dessus relient 4 grandeurs : le capital, l'intérêt, le taux d'intérêt et la durée.
2. Le calcul des intérêts simples pour une année commerciale est plus avantageux pour celui qui perçoit les intérêts.

## Exercices d'application:

1. Quel est l'intérêt produit à intérêt simple pour un placement de 12 500 dh au taux annuel de 10,5% , pendant 96 jours ?
2. Soit un capital de 30 000 dh, placé à intérêt simple du 1<sup>er</sup> au 27 juillet au taux annuel de 12,5%. Calculer l'intérêt produit par ce placement.
3. Pour un taux annuel de 4%, un capital  $C$  produit 3 600 dh d'intérêt simple en 12 mois. Quel est ce capital ?

- 
4. Un capital de 1 260 000 dh est placé pendant 45 jours et produit un intérêt simple de 9 450 dh. Quel est le taux annuel de ce placement ?
  
  5. Un capital de 80 000 dh est placé à un taux annuel de 3% et produit un intérêt de 600 dh. Quelle est la durée du placement ?

## II-3 Valeur acquise :

**Définition:** La valeur acquise ou valeur définitive est la somme du capital et des intérêts gagnés, après une certaine période de placement.

Elle est donnée par :  $V = C + I$

## II-4 Taux moyen de plusieurs placements:

**Définition:** Le taux moyen est un taux qui, appliqué à  $p$  placements (pour  $p$  durées différentes et  $p$  taux d'intérêt différents), donne le même intérêt général.

Ce taux est donné par:

$$t_m = \frac{\sum_{i=1}^p C_i * t_i * j_i}{\sum_{i=1}^p C_i * j_i}$$

## II-5 Application aux comptes courants et d'intérêts : (Méthode hambourgeoise)

### II-5-1 Définitions :

- Un compte est dit *compte courant* quand toutes les sommes portées tant au débit qu'au crédit perdent leurs individualités et s'ajoutent algébriquement.
- Un compte est *dit compte courant et d'intérêts* lorsque les sommes portées en compte sont génératrices d'intérêts à partir d'une date dite : **date de valeur**.

- La **date de valeur** diffère la plupart du temps de la date de l'opération. En fait, **c'est la date à partir de laquelle l'opération est prise en compte**. Cette date est généralement postérieure à la date effective d'une opération créditrice et antérieure à la date effective d'une opération débitrice.
- La **date d'arrêté du compte** est la date à laquelle le solde final est déterminé après le calcul des intérêts et des diverses commissions, et ce solde est exigé.

- Pour le taux d'intérêt d'un compte courant et d'intérêt, il en existe 3 types:
  - ✓ *Taux réciproque* : c'est un taux qui est le même pour les opérations portées au crédit ou au débit
  - ✓ *Taux non réciproques* : taux différents pour le débit et le crédit
  - ✓ *Taux variable* : un taux qui peut changer en cours de période

## II-5-2 Principes de la méthode hambourgeoise :

Le principe de cette méthode consiste à calculer l'intérêt du solde après chaque opération, pour la durée allant de la date de valeur de l'opération en cours à la date de valeur de l'opération suivante; sachant que le dernier solde porte intérêt depuis sa date de valeur jusqu'à la date d'arrêté du compte.

A l'arrêté du compte, on somme algébriquement tous les intérêts ainsi calculés au dernier solde et aux différentes commissions prélevées sur ce compte.

### **II-5-3 Application :**

M. Hamidi possède un compte courant et d'intérêts pour lequel le taux débiteur est de 7,5 % tandis que le taux créditeur est de 6 %.

La date d'arrêté du compte est le 30 de chaque mois. Durant le mois de juillet, les opérations effectuées par M. Hamidi sont les suivantes:

| Date de l'opération | Type d'opération     | Montant (dh) | Date de valeur |
|---------------------|----------------------|--------------|----------------|
| 01/07               | Nouveau solde crd.   | 35 300       | 30/06          |
| 08/07               | Retrait chèque       | 42 000       | 07/07          |
| 13/07               | Versement espèces    | 60 000       | 13/07          |
| 18/07               | Remise d'effets      | 20 000       | 21/07          |
| 24/07               | Paiement fournisseur | 90 000       | 23/07          |
| 26/07               | Dépôt en espèces     | 50 000       | 27/07          |

Sachant qu'une commission de tenue de compte de 0,5% est prise sur le total des opérations débitrices, calculons le nouveau solde au 30 juillet.



## II-4 Intérêt précompté - Taux effectif :

Tous les résultats et formules qui précèdent sont fondés sur le paiement des intérêts par l'emprunteur à la fin de la période de prêt.

Cependant, il est fréquent que le prêteur exige que les intérêts soient versés le jour de la conclusion du contrat. Dans ce cas, le prêt est dit : prêt à **intérêt précompté**.

Il est alors évident que le capital engagé procure au prêteur un taux de placement supérieur au taux d'intérêt stipulé. On parle alors du : **taux effectif de placement**.

## Généralisation :

- Soit un capital  $C$  prêté à intérêt précompté au taux annoncé  $t$  pendant une durée de  $n$  années. Alors le taux effectif de placement est donné par :

$$t_{eff} = \frac{100 * t}{100 - tn}$$

# III- Escompte commercial

## III-I Exemple introductif :

La société *X-Net* vend à M. Rami (commerçant de son état), 300 000 dh de marchandise, livrable le 12 octobre mais payable seulement au 31 décembre.

Ainsi, la société *X-Net* devra attendre le 31 décembre pour entrer en possession de ses fonds.



Pour cela, le jour de la vente (le 12 oct.), M. Rami devra:

- Soit souscrire un billet à ordre, càd. de promettre par écrit de régler la somme de 300 000 dh à la société *X-Net* à la date du 31 décembre
- Soit apposer sa signature sur une lettre de change, ou traite, rédigée par la société *X-Net* reconnaissant aussi l'existence de la créance de 300 000 dh au profit de la société.

Le billet à ordre ou la lettre de change sont des effets de commerce.

Cependant, si la société *X-Net* a besoin de liquidités bien avant le 31 décembre, elle pourra solliciter une avance auprès de sa banque, qui sera garantie par le montant de la créance de 300 000 dh due par M. Rami.

Dans ce cas, la société recevra la somme de 300 000 dh, mais diminuée d'une rémunération au profit de la banque qu'on appelle : escompte commercial.

## III-2 Définitions

### Définition 1 :

Un **effet de commerce** (traite ou billet à ordre ou lettre de change) est un moyen de règlement par lequel un débiteur s'engage à payer à son créancier, à une date précise, une somme d'argent correspondant au montant de la dette qu'il a contracté.

### Définition 2 :

On appelle **valeur nominale** de l'effet, la somme à payer à la date d'échéance (300 000 dh dans l'exemple introductif).

### Définition 3 :

On appelle **escompte commercial**, l'intérêt de la valeur nominale de l'effet à un taux d'escompte précisé, pour la durée séparant la date de négociation de la date d'échéance. C'est le prix du service rendu par le banquier.

### Définition 4 :

Soit A un effet de commerce ayant n jours à courir. Alors la **valeur actuelle** de A est donnée par la valeur nominale diminuée de l'escompte commercial; càd :

$$V_0 = A - \frac{A * t * n}{36000}$$

### Exemple :

Deux effets dont l'un est payable dans 120 jours, l'autre dans 90 jours, sont escomptés au taux de 12%. Le total des montants des deux effets est de 34 000 dh et le total des escomptes est de 1 200 dh.

*Quelle est la valeur nominale de chaque effet ?*

### **III-3 Effets équivalents :**

De même qu'un créancier peut céder son effet de commerce avant son terme à un banquier, un débiteur peut demander de rembourser une dette avant ou après son échéance.

## Définition :

Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux effets de commerce ayant  $n_1$  et  $n_2$  jours à courir. On suppose qu'ils sont escomptés au même taux, le même jour. Alors :

- $A_1$  et  $A_2$  sont dits **effets équivalents** s'ils ont une même valeur actuelle, c.à.d. :

$$A_1 - \frac{A_1 * t * n_1}{36000} = A_2 - \frac{A_2 * t * n_2}{36000}$$

- On appelle **date d'équivalence** de deux effets, la date à laquelle ils ont une même valeur actuelle.

## Exemples :

1. Le 1<sup>er</sup> janvier, un effet de commerce de 130 000 dh échéant le 31 janvier 2015 est remplacé par un effet de commerce  $A_2$  échéant le 1<sup>er</sup> avril 2015, à un taux commun de 4% . *Calculons  $A_2$ .*
2. On remplace un effet à 26 jours, de valeur nominale 6 372 dh, par un effet équivalent, de valeur nominale 6 429 dh et échéant dans 58 jours. *Calculons le taux d'escompte.*

3. Un effet de commerce de  $7\,250$  dh échéant dans 75 jours est équivalent (aujourd'hui) à un 2<sup>ème</sup> effet de  $VN = 7\,230$  dh, taux d'escompte = 8%.

*Quel est le nombre de jours qui restent à courir pour le 2<sup>ème</sup> effet.*

4. Soient deux effets  $A_1$  et  $A_2$  tirés tous les deux le 3 mai.

$A_1 = 17\,600 \text{ dh}$  , date d'échéance le 17 août.

$A_2 = 17\,700 \text{ dh}$  , date d'échéance le 15 nov.

$t = 2,25\%$ . *Calculons la date à laquelle ces deux effets seront équivalents?*

## III-4 Échéance commune :

### Définition :

- Un effet unique **A** est équivalent à plusieurs autres effets : **A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub>, ..., A<sub>k</sub>**, à une date et à un taux donnés, si la valeur actuelle de l'effet unique est égale à la somme des valeurs actuelles des autres effets; c.à.d. :

$$A - \frac{A * t * n}{36000} = A_1 - \frac{A_1 * t * n_1}{36000} + A_2 - \frac{A_2 * t * n_2}{36000} + \dots + A_k - \frac{A_k * t * n_k}{36000}$$

- Quand on remplace plusieurs effets par un nouvel effet unique, alors la date d'échéance de ce nouvel effet est appelée : la date d'échéance commune.

## Exemples :

I. Le 1<sup>er</sup> mars, on remplace les 3 effets suivants:

20 000 dh échéant dans 30 jours

30 000 dh échéant dans 40 jours

50 000 dh échéant dans 60 jours

par un effet unique de  $VN = 100\ 659$  dh, au taux d'escompte  $t = 4,5\%$ .

*Calculons la date d'échéance commune.*

2. On souhaite remplacer, le 15 juin, les 3 effets suivants:

5 000 dh échéant le 20 août

4 000 dh échéant le 15 juillet

12 000 dh échéant le 20 septembre

par un effet unique échéant dans 103 jours. Taux d'escompte  $t = 13\%$ .

*Calculons la valeur nominale de l'effet unique.*

## III-5 Échéance moyenne :

### Définition :

- On appelle échéance moyenne de plusieurs effets:  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , l'échéance commune  $A$  de ces effets dans le cas où la valeur nominale de l'effet unique  $A$  est égale à la somme des valeurs nominales des effets remplacés; c.à.d. :

$$\begin{cases} A - \frac{A * t * n}{36000} = A_1 - \frac{A_1 * t * n_1}{36000} + A_2 - \frac{A_2 * t * n_2}{36000} + \dots + A_k - \frac{A_k * t * n_k}{36000} \\ A = A_1 + A_2 + \dots + A_k \end{cases}$$

## Exemple :

*Déterminer la date d'échéance moyenne des 3 effets suivants :*

40 000 dh au 30 avril

60 000 dh au 30 mai

100 000 dh au 19 juin

Date d'équivalence : 31 mars.