MATHEMATIQUES FINANCIERES

Rachid MCHICH

Chap. IV : Emprunts indivis & emprunts obligataires

I- Introduction :

Lorsqu'il est confronté à des difficultés de trésorerie, un agent économique est obligé de recourir à des emprunts pour régler ces difficultés.

Il existe une grande variété d'emprunts qui peuvent être regroupés en deux grandes catégories, à savoir: les emprunts indivis et les emprunts obligataires.

<u>Définition 1:</u> Quand le prêteur est unique, en général une banque, on parle d'**emprunt indivis**.

Dans ce cas, l'emprunteur doit payer périodiquement au prêteur, une somme d'argent, sous forme d'annuités comprenant :

- une partie du capital emprunté, appelée : **amortissement**,
- les **intérêts** basés sur le capital emprunté.

Définition 2: Quand il y a plusieurs prêteurs, on parle d'**emprunt obligataire**. En général, il s'agit d'un emprunteur qui peut être une collectivité territoriale, l'Etat, une banque, une entreprise…etc.

Les prêteurs possèdent alors des **obligations** : ce sont des titres dont le remboursement est régi par des règles précises.

Chaque **obligation** est caractérisée, entre autres, par sa valeur nominale, le taux d'intérêt nominal, la périodicité du service d'intérêt, sa durée et les modalités de remboursement.

II- Emprunts indivis :

Dans ce cas, les annuités peuvent se différencier de la manière suivante :

- **Annuités constantes :** la somme à rembourser périodiquement est constante et comporte une fraction du capital emprunté et des intérêts.

- **Annuités variables (à amortissements constants) :** la somme à rembourser comprend une fraction constante du capital emprunté et des intérêts variables (en général dégressifs).

- **Remboursement in fine :** à la fin des *n* périodes, l'emprunteur rembourse la totalité du capital emprunté et de ses intérêts (**in fine absolu**) ou bien l'emprunteur rembourse périodiquement les intérêts à chaque période et le capital entier à la dernière période (**in fine relatif**).

II-1 Tableau d’amortissement :

Soient :

- C_0 : le capital emprunté à la période initiale
- $a_1, a_2, \ldots, a_n$: les annuités à payer périodiquement (en fin de période)
- $c_1, c_2, \ldots, c_n$: la fraction de capital (amortissement) à payer périodiquement (en fin de période)
- $r_1, r_2, \ldots, r_n$: le montant du capital restant à rembourser après paiement des annuités 1, 2, …, n
- n : nombre d’annuités (ou périodes)
- i : taux d’intérêt pour 1 dh par an

On considère des annuités de fin de période. On peut alors dresser le tableau d’amortissement suivant :

Période	Dette en début de période	Intérêt en fin de période	amortissement	Annuité	Dette restante
1	C_0	$C_0 i$	c_1	$a_1 = c_1 + C_0 i$	$r_1 = C_0 - c_1$
2	r_1	$r_1 i$	c_2	$a_2 = c_2 + r_1 i$	$r_2 = r_1 - c_2$
3	r_2	$r_2 i$	c_3	$a_3 = c_3 + r_2 i$	$r_3 = r_2 - c_3$
…	…	…	…	…	…
P	r_{p-1}	$r_{p-1} i$	c_p	$a_p = c_p + r_{p-1} i$	$r_p = r_{p-1} - c_p$
…	…	…	…	…	…
n	r_{n-1}	$r_{n-1} i$	c_n	$a_n = c_n + r_{n-1} i$	$r_n = r_{n-1} - c_n = 0$

De ce tableau, on peut déduire un certain nombre de résultats :

– La somme des amortissements doit être égale au capital emprunté :

$$C_0 = \sum_{k=1}^{n} c_k$$

– Le capital emprunté peut être considéré comme la valeur actuelle du capital produit par le versement de toutes les annuités. On a donc :

$$C_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k (1+i)^{-k}$$

– La dette restant en début de dernière période est égale au dernier amortissement :

$$r_{n-1} = c_n$$

– Le capital remboursé à la fin de la $p^{\text{ième}}$ période est :

$$R_p = \sum_{k=1}^{p} c_k$$

– Le capital restant à rembourser à la fin de la $p^{\text{ième}}$ période est :

$$r_p = C_0 - R_p$$

Examinons maintenant les cas usuels suivants :

II-2 Annuités constantes :

Soit *a* la valeur commune des annuités. Alors on a :

$$V_0 = C_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Et ainsi, l'annuité constante est donnée par :

$$a = C_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

Exemple : On emprunte un capital de 100 000 dhs à 6%, remboursable par 5 annuités constantes de fin de période. Dressons alors le tableau des remboursements.

Dans ce cas, la valeur de l'annuité est :

$$a = C_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 23739,64\ dh$$

Ainsi, on a le tableau d'amortissement suivant :

II-3 Annuités variables à amortissements constants :

Dans ce cas, les amortissements c_k sont tous égaux à *c*.

Le capital emprunté est donc : $C_0 = nc$; c.à.d. :

$$c = \frac{C_0}{n}$$

Exemple : On emprunte un capital de 100 000 dhs à 6% en 5 annuités variables de fin de période mais d'amortissements constants. Dressons alors le tableau des remboursements.

Le montant de l'amortissement est :

$$c = \frac{C_0}{n} = 20\,000\ dh$$

D'où le tableau d'amortissement suivant :

II-4 Remboursement in fine absolu :

Même exemple

II-4 Remboursement in fine relatif :

Même exemple