Programmation Linéaire

DUALITE

Y. AL MERIOUH

Dualité

- *À tout problème de PL (le primal) on peut associer un autre problème PL, son dual*
- *Le problème dual permet de donner une autre interprétation économique au problème primal*

Formulation du Primal

$$\max \ z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ \dots \ + c_r x_r$$

sc

$$a_{1\,1} x_1 + a_{1\,2} x_2 + \ \dots \ + a_{1\,r} x_r \leq b_1$$
$$a_{2\,1} x_1 + a_{2\,2} x_2 + \ \dots \ + a_{2\,r} x_r \leq b_2$$
$$\dots$$
$$a_{m\,1} x_1 + a_{m\,2} x_2 + \dots + a_{m\,r} x_r \leq b_m$$

$$x_j \geq 0 \,, \ \forall j = 1,2, \dots , r$$

Formulation du Dual

$$\min \; v = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_m u_m$$

sc

$$a_{1\,1} u_1 + a_{2\,1} u_2 + \dots + a_{m\,1} u_m \geq c_1$$
$$a_{1\,2} u_1 + a_{2\,2} u_2 + \dots + a_{m\,2} u_m \geq c_2$$
$$\dots$$
$$a_{1\,r} u_1 + a_{2\,r} u_2 + \dots + a_{m\,r} u_m \geq c_r$$

$$u_i \geq 0 \,, \; \forall\, i = 1,2, \dots , m$$

Formulation du Dual

Pour obtenir la formulation du problème dual, il faut :

- ***Associer à chacune des m inégalités une nouvelle variable*** $u_1 , u_2 , \ldots\ldots\ldots , u_m \geq 0$
- ***La fo est une fonction v à minimiser***
- ***Il y'a r contraintes + les contraintes de non négativité***
- ***Inversement, si le problème initiale est un problème de minimisation, son dual serait un problème de maximisation. Les problème de PL se présentent donc par paires.***

Primal et son Dual

Si on observe le jeu de permutations des coefficients entre les deux programmes, on remarque que :

1. ***Le dual d'un problème de max. est un problème min, et réciproquement.***
2. ***Le sens des inégalités dual est inverse de celui des inégalités du primal, sauf les contraintes de non négativité.***
3. ***Le dual comporte autant des contraintes qu'il y'a de variables dans le primal, et et réciproquement***
4. ***Les coefficients de la f.o. du primal apparaissent comme des constantes des contraintes du dual, et inversement***
5. ***Les coefficients, lus en colonne dans le primal, sont écrits en ligne dans le dual, et inversement***

Dualité

Exemple :

<u>régime alimentaire</u> :

- ***6 produits alimentaires comme sources de vitamines A et C***
- ***but : minimiser le coût du régime tout en satisfaisant la valeur nutritionnelle minimale de chaque vitamine***

Dualité

Exemple :

Valeurs nutritionnelles & coût par produit

produit (i) (unités/kg)	Produits 1	2	3	4	5	6	demande (unité)
vitamine A	1	0	2	2	1	2	9
vitamine C	0	1	3	1	3	2	19
prix par kg	35	30	60	50	27	22	

Dualité

Le modèle :

x_j = quantité consommée de chaque produit (en kg)

$$\min \quad z = 35\,x_1 + 30\,x_2 + 60\,x_3 + 50\,x_4 + 27\,x_5 + 22\,x_6$$

sc

$$\begin{array}{llllllll} x_1 & & + 2\,x_3 & + 2\,x_4 & + x_5 & + 2\,x_6 & \geq & 9 \\ & x_2 & + 3\,x_3 & + x_4 & + 3\,x_5 & + 2\,x_6 & \geq & 19 \end{array}$$

$$x_1\,,\, x_2\,,\, x_3\,,\, x_4\,,\, x_5\,,\, x_6 \geq 0$$

Dualité

Exemple : ***une autre vision du problème***

<u>producteur de cachets de vitamines synthétiques</u> :

- ***6 produits alimentaires contenant vitamines A et C***
- ***but : être compétitif tout en maximisant son profit et en remplissant la demande***

Dualité

Exemple :

Prix maximum & composition de chaque produit

produit (i) (unité/kg)	Produits						demande (unité)
	1	2	3	4	5	6	
vitamine A	1	0	2	2	1	2	9
vitamine C	0	1	3	1	3	2	19
prix par kg	35	30	60	50	27	22	

par exemple, prix compétitif du produit 5 $\Rightarrow$ inférieur ou égal à 27

Dualité

Le modèle :

w_i = prix d'une unité de chaque vitamine

produit 5 = 1 unité de vitamine A + 3 unités de vitamine C

$\Rightarrow \; w_1 + 3w_2 \leq 27$

$$\max \quad v = 9\,w_1 + 19\,w_2$$

sc

$$\begin{aligned}
w_1 \qquad\qquad & \leq 35 \\
w_2 & \leq 30 \\
2\,w_1 + 3\,w_2 & \leq 60 \\
2\,w_1 + w_2 & \leq 50 \\
w_1 + 3\,w_2 & \leq 27 \\
2\,w_1 + 2\,w_2 & \leq 22 \\
w_1\,,\, w_2 & \geq 0
\end{aligned}$$

Dualité

Primal

$$\min \; z = 35\,x_1 + 30\,x_2 + 60\,x_3 + 50\,x_4 + 27\,x_5 + 22\,x_6$$

sc

$$\begin{aligned} x_1 \quad + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 &\geq 9 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 &\geq 19 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dual

$$\max \; v = 9\,w_1 + 19\,w_2$$

sc

$$\begin{aligned} w_1 \quad\quad &\leq 35 \\ w_2 &\leq 30 \\ 2\,w_1 + 3\,w_2 &\leq 60 \\ 2\,w_1 + w_2 &\leq 50 \\ w_1 + 3\,w_2 &\leq 27 \\ 2\,w_1 + 2\,w_2 &\leq 22 \\ w_1, w_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dualité

Primal

cx

$$\min\ z = \boxed{\begin{aligned}&35\,x_1 + 30\,x_2 + 60\,x_3\\ &+ 50\,x_4 + 27\,x_5 + 22\,x_6\end{aligned}}$$

sc

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 \quad + 2x_3 + 2x_4 + \quad x_5 + 2x_6 &\geq 9\\ x_2 + 3x_3 + \quad x_4 + 3x_5 + 2x_6 &\geq 19\end{aligned}}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$$Ax \geq b$$

Dual

bw

$$\max\ v = \boxed{9\,w_1 + 19\,w_2}$$

sc

$$\boxed{\begin{aligned} w_1 \qquad\qquad\quad &\leq 35\\ w_2 &\leq 30\\ 2\,w_1 + 3\,w_2 &\leq 60\\ 2\,w_1 + \quad w_2 &\leq 50\\ w_1 + 3\,w_2 &\leq 27\\ 2\,w_1 + 2\,w_2 &\leq 22\end{aligned}}$$

$$w_1, w_2 \geq 0$$

$$Aw \leq c$$

Dualité - Généralisation

Primal (P)	Dual (D)
$\min\ z = cx$	$\max\ v = bw$
$1 \times n \qquad n \times 1$	$1 \times m \qquad m \times 1$
sc	sc
$Ax \geq b$	$Aw \leq c$
$m \times n \qquad m \times 1$	$n \times m \qquad n \times 1$
$x \geq 0$	$w \geq 0$

Dualité - Théorèmes

1. ***Le dual et le primal ont le même optimum. Cela signifie que le max. de l'un est égale au min. de l'autre.***
2. ***À l'optimum, lorsqu'une contrainte n'est pas saturée, la variable duale correspondante est nulle.***