Solution par algorithme du Simplexe

Méthode des tableaux

Ou

(Méthode de Dantzig)

Y. ALMERIOUH

Algorithme du Simplexe

- ***Deux variables $\Rightarrow$ Solution graphique possible***
- ***Plus de 2 Variables $\Rightarrow$ Solution graphique compliquée voir impossible***
- ***D'où le recours à la méthode du simplexe***

Algorithme du Simplexe

C'est une procédure itérative qui consiste à explorer les sommets du domaine des solution possibles (polygone ou polyèdre convexe), en cheminant d'un sommet à un autre , meilleur que le précédent, jusqu'au sommet optimal.

1ère phase

- ***Introduction des variables d'écart (c'est le passage du programme canonique au programme standard***
- ***Revenons au problème de production précédent***

max: z = 3x + 4y

sous:

$$2x + 3y \leq 180$$
$$2x + y \leq 120$$
$$x + 3y \leq 150$$

$$x , y \geq 0$$

- *u, v et w variables d'écart positives*
- *Nous leur affectons le coefficient 0 dans la f.o. pour que leur introduction ne modifie pas le profit*

Canonique

max: $z = 3x + 4y$

sc

$2x + 3y \leq 180$

$2x + y \leq 120$

$x + 3y \leq 150$

$x , y \geq 0$

Standard

max: $z = 3x + 4y + 0u + 0v + 0w$

sc

$$
\begin{aligned}
2x + 3y + u \quad\quad\quad\quad &= 180 \\
2x + y \quad\quad + v \quad\quad &= 120 \\
x + 3y \quad\quad\quad\quad + w &= 150
\end{aligned}
$$

$x , y , u , v , w \geq 0$

système de 3 équations à 5 inconnus $\Rightarrow$ Indétermination d'ordre 2

2ème phase
Construction du 1er tableau

On part de la solution de base la plus mauvaise mais acceptable,
on posant :

$x = y = 0 \Rightarrow \quad u = 180$
$\qquad\qquad\qquad v = 120$
$\qquad\qquad\qquad w = 150$

À ce niveau de production le profit est nul (z = 0)

<u>Remarque</u> :
- ***Les itérations successives sont présentés sous formes de tableaux.***
- ***Chaque tableau correspond à une solution de base acceptable (à un sommet du simplexe)***

2ème phase
Construction du 1er tableau

Le tableau de départ est le suivant :

<u>Tableau 1</u>

x	y	u	v	w		
3	4	0	0	0	0	- z
2	3	1	0	0	180	u
2	1	0	1	0	120	v
1	3	0	0	1	150	w

- ***u, v et w sont les 3 variables de base***
- ***Pour des raisons pratiques : valeur de –z plutôt que z (0 pour ce 1er tableau)***
- ***Les autres éléments sont les coefficients de la f.o. et ceux de la matrice des contraintes***

3ème phase
Passage au 2ème tableau par la méthode de pivot

Il faut améliorer la solution z = 0

Le principe de l'itération est le suivant :

- ***Faire entrer dans la base une variable (entrante) à la place de l'une de celles qui s'y trouvaient déjà.***

Le choix de la variable candidate est déterminer par la nécessité d'aller le plus rapidement possible vers la solution optimale $\Rightarrow$ variable qui apporte la contribution la plus forte à la f.o. (il s'agit de y qui correspond à la plus grande valeur positive de la 1ère ligne).

3ème phase

Passage au 2ème tableau par la méthode de pivot

- ***Pour déterminer la variable sortante qui laisse la place à y, il faut chercher le pivot se trouvant à l'intersection de la colonne de la variable entrante et la ligne de la sortante. Il faut donc calculer à gauche du tableau les w_i rapports des valeurs des variables de base sur les coefficients de la colonne de la variable candidate. Le plus petit w_i positif indique le pivot, il s'agit de 3, la variable sortante est donc w. La place de w sera occupée par y dans le 2è tableau .***

Tableau 1	x	y	u	v	w		
	3	4	0	0	0	0	- z
w_1 = 180/3= 60	2	3	1	0	0	180	u
w_2 = 120/1= 120	2	1	0	1	0	120	v
w_3 = 150/3= 50	1	$\boxed{3}$	0	0	1	150	w

Calcul des coefficients du nouveau tableau :

pivot : $a_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow x_j$ variable rentrante

x_i variable sortante

$$A_i' \leftarrow A_i / a_{ij} \Rightarrow a_{ij} = 1 \ ;$$

$$l \neq i \Rightarrow A_l' \leftarrow A_l - a_{lj} \times A_i' \ \text{ou}$$

$$a_l'_k \leftarrow a_{lk} - a_{lj} \times a_{ik} / a_{ij}$$

$$\Downarrow$$

$$a_l'_j \leftarrow a_{lj} - a_{lj} \times a_{ij} / a_{ij} = 0$$

Tableau 1

$w_1 = 60$

$w_2 = 120$

$w_3 = 50$

x	y	u	v	w		
3	4	0	0	0	0	- z
2	3	1	0	0	180	u
2	1	0	1	0	120	v
1	$\boxed{3}$	0	0	1	150	w

Tableau 2

x	y	u	v	w		
5/3	0	0	0	-4/3	-200	- z
1	0	1	0	-1	30	u
5/3	0	0	1	-1/3	70	v
1/3	1	0	0	1/3	50	y

- ***Nous obtenons ainsi avec le tableau 2, une nouvelle solution de base acceptable (x=0 , y=50 , u=30 , v=70 , w=0), elle correspond à z=200 (sommet b du graphique)***
- ***Sommes-nous à l’optimum ? A l’optimum tous les coefficients de la 1ère ligne sont négatives ou nuls,car si on augmente la variable dont le coefficient est négatif d’une unité, z diminue.***

Remarques

Remarques permettant de diminuer le nombre de calcul

- ***La colonne de w dans le tab.1 devient celle de y dans le tab.2***
- ***On commence par remplir la 1ère ligne du tableau,si tous les coefficients sont négatives ou nuls,il suffit alors de remplir la dernière colonne qui permet de déduire la solution***
- ***u et v figure dans les 2 triplés solution, leurs colonnes ne sont pas modifiés***
- ***Dans la méthode du simplexe, il faut veiller à ne pas arrondir les calculs***

la phase suivante

Le principe pour passer au tableau suivant est le même que précédemment

Tableau 2

	x	y	u	v	w		
	5/3	0	0	0	-4/3	-200	- z
$w_1 = 30$	$\boxed{1}$	0	1	0	-1	30	u
$w_2 = 42$	5/3	0	0	1	-1/3	70	v
$w_3 = 150$	1/3	1	0	0	1/3	50	y

Tableau 3

	x	y	u	v	w		
	0	0	-5/3	0	1/3	-250	- z
$w_1 = -30$	1	0	1	0	-1	30	x
$w_2 = 15$	0	0	-5/3	1	$\boxed{4/3}$	20	v
$w_3 = 60$	0	1	-1/3	0	2/3	40	y

Tableau 3

x	y	u	v	w		
0	0	-5/3	0	1/3	-250	- z
1	0	1	0	-1	30	x
0	0	-5/3	1	$\boxed{4/3}$	20	v
0	1	-1/3	0	2/3	40	y

$w_1 = -30$

$w_2 = 15$

$w_3 = 60$

Tableau 4

x	y	u	v	w		
0	0	-5/4	-1/4	0	-255	- z
1	0	-1/4	3/4	0	45	x
0	0	-5/4	3/4	1	15	w
0	1	-1/2	-1/2	0	30	y

Le tab.4 est le tableau final, tous les coefficients de la 1ère ligne sont négatifs, la solution optimal est donc :

$x=45$, $y=30$, $u=0$, $v=0$, $w=15$ et $z=255$

On se trouve au point $d=(x,y)=(45,30)$

Cela signifie que pour obtenir un profit maximal de 255 dh, il faut produire 45 produits x et 30 produits y

Le tableau nous donne donc plus d'informations que le graphique, car les variables d'écart associées aux différentes contraintes ont une signification économique :

u=0 et v=0 signifie qu'à l'optimum, les produits A et B sont épuisés

w=15 c'est la quantité non utilisée du produit C

En effet, il est possible de vérifier que :

150 – (1 x 45 + 3 x 30) = 15