# *Programmation Linéaire (1)*

*Y. AL MERIOUH*

# *Recherche Opérationnelle (RO)*

- ***Historique :***
  - *Deuxième guerre mondiale*
    - » ***opérations militaires efficaces***
  - *Révolution Industrielle*
    - » ***succès de la RO aux opérations militaires***
      - $\Rightarrow$ ***RO dans l 'industries***
  - *Programmation Linéaire*
    - » ***méthode du Simplexe (Dantzig - 1947)***
  - *L 'apparition de l 'ordinateur*

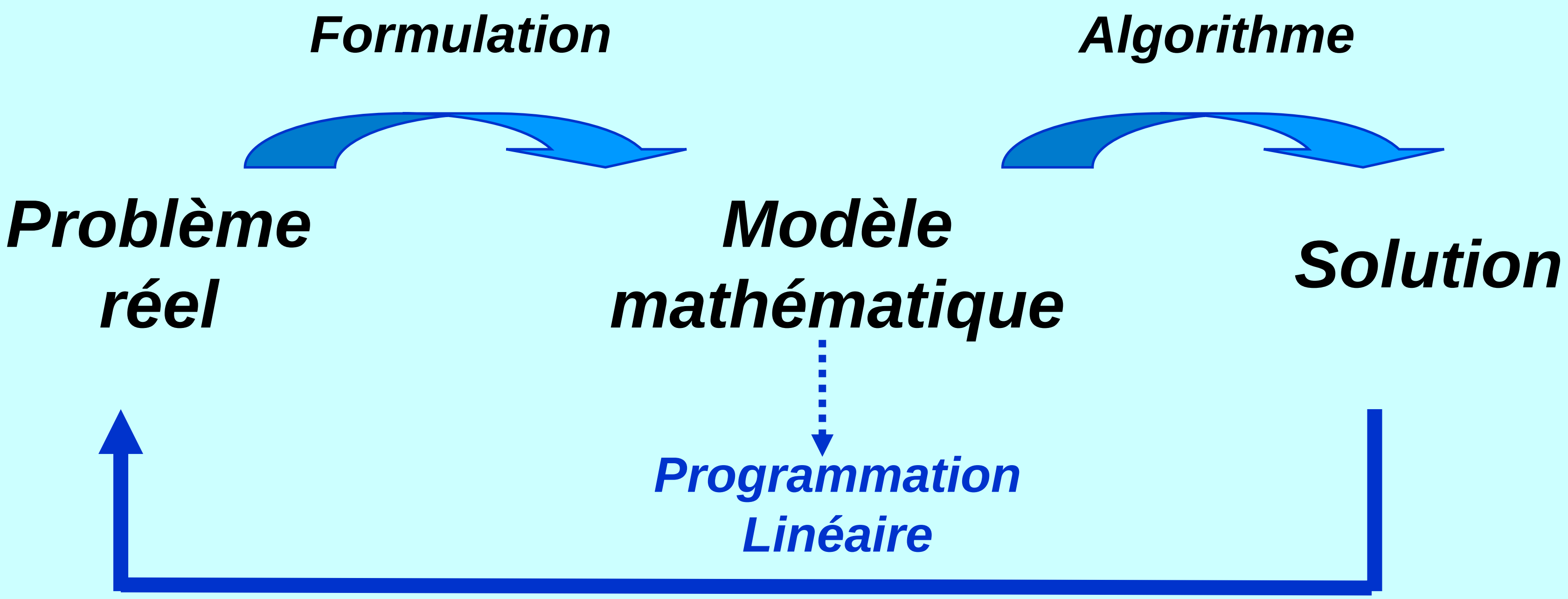
# *Recherche Opérationnelle (RO)*

- ***Définition :***

  *« Outil mathématique de l'aide à la décision qui permet de trouver une solution optimale ou bien, pour des problèmes difficiles, une solution la plus proche possible de l 'optimum ».*

# Recherche Opérationnelle (RO)

- *Modélisation*



# *Recherche Opérationnelle (RO)*

- ***Techniques de Modélisation :***
  - *Programmation Linéaire*
  - *Théorie des Graphes*
  - *Théorie des Files d'Attente*
  - *Simulation de Systèmes*
  - *Théorie des Jeux*

    .
    .
    .

# *Programmation Linéaire*

- ***Gestion optimale de ressources***
  - *Faire le mieux :*
    - » ***coût minimum***
    - » ***meilleur profit***
  - *Avec les ressources disponibles :*
    - » ***temps machine***
    - » ***ressources humaines***
    - » ***matière première***
    - » ***postes de travail***

***.***

***.***

***.***

# *Programmation Linéaire*

- ***Modèle <u>linéaire</u>*** $\Rightarrow$
  - *fonction linéaire, de plusieurs variables, à optimiser*
  - *variables soumises à des contraintes :*
    - ***linéaires***
    - ***restrictions de non négativité***

# *Modèle Linéaire*

- ***Exemple :***

  ***3 types de machines A, B et C***

  ***pour produire***

  ***4 produits différents I, II, III et IV.***

***Chaque produit doit être traité par chacune des machines dans l'ordre***

# *Modèle Linéaire*

- ***Exemple :***

***Caractéristiques des produits & machines***

| *Type de machine* | *Produits* | | | | *Disponibilité hebdomadaire de chaque machines* |
|---|---|---|---|---|---|
| | *I* | *II* | *III* | *IV* | |
| *A* | *1,5* | *1* | *2,4* | *1* | *2000* |
| *B* | *1* | *5* | *1* | *3,5* | *8000* |
| *C* | *1,5* | *3* | *3,5* | *1* | *5000* |
| *Profit par unité* | *5,24* | *7,30* | *8,34* | *4,18* | |

# *Modèle Linéaire*

- ***Exemple :***
  - *But : établir la production hebdomadaire de chaque produit de façon à maximiser le profit.*

- ***Le modèle :***

  $x_j$ - *production hebdomadaire du produit* $j$.

  *but : trouver les valeurs de* $x_1$, $x_2$, $x_3$ *et* $x_4$ *qui maximisent le profit, considérant la limite de temps d'utilisation de chaque machine*

# Modèle Linéaire

- **Exemple :**
  - But : max $z = 5{,}24\,\mathbf{x_1} + 7{,}30\,\mathbf{x_2} + 8{,}34\,\mathbf{x_3} + 4{,}18\,\mathbf{x_4}$
  - Contraintes des machines :

$$
\begin{array}{llllllllll}
A: & 1{,}5\,\mathbf{x_1} & + & \mathbf{x_2} & + & 2{,}4\,\mathbf{x_3} & + & \mathbf{x_4} & \leq & 2000 \\
B: & \mathbf{x_1} & + & 5\,\mathbf{x_2} & + & \mathbf{x_3} & + & 3{,}5\,\mathbf{x_4} & \leq & 8000 \\
C: & 1{,}5\,\mathbf{x_1} & + & 3\,\mathbf{x_2} & + & 3{,}5\,\mathbf{x_3} & + & \mathbf{x_4} & \leq & 5000
\end{array}
$$

  - Contraintes de non négativité :

$\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}, \mathbf{x_4} \geq 0$

# Formulation

## Forme générale :

$$\max \text{ (ou min) } \; z = \boldsymbol{c_1 x_1} + \boldsymbol{c_2 x_2} + \ldots + \boldsymbol{c_r x_r}$$

*sc*

$$\boldsymbol{a_{i\,1} x_1} + \boldsymbol{a_{i\,2} x_2} + \ldots + \boldsymbol{a_{i\,r} x_r} \; \{ \le \, , = , \ge \} \; \boldsymbol{b_i} \; , \forall \, \boldsymbol{i = 1,2, \ldots , m}$$

$$\boldsymbol{x_j} \; \ge \; \boldsymbol{0} \; , \; \forall \, \boldsymbol{j = 1,2, \ldots , r}$$

# Remarques

$$\max \text{ (ou min) } \; z = \mathbf{c_1\, x_1} + \mathbf{c_2\, x_2} + \; \dots \; + \mathbf{c_r\, x_r}$$

sc

$$\mathbf{a_{i\,1}\, x_1} + \mathbf{a_{i\,2}\, x_2} + \; \dots \; + \mathbf{a_{i\,r}\, x_r} \; \{ \le \,, =, \ge \} \; \mathbf{b_i} \,, \forall\, \mathbf{i = 1,2, \dots , m}$$

$$\mathbf{x_j} \;\; \ge \; \mathbf{0} \,, \; \forall\, \mathbf{j = 1,2, \dots , r}$$

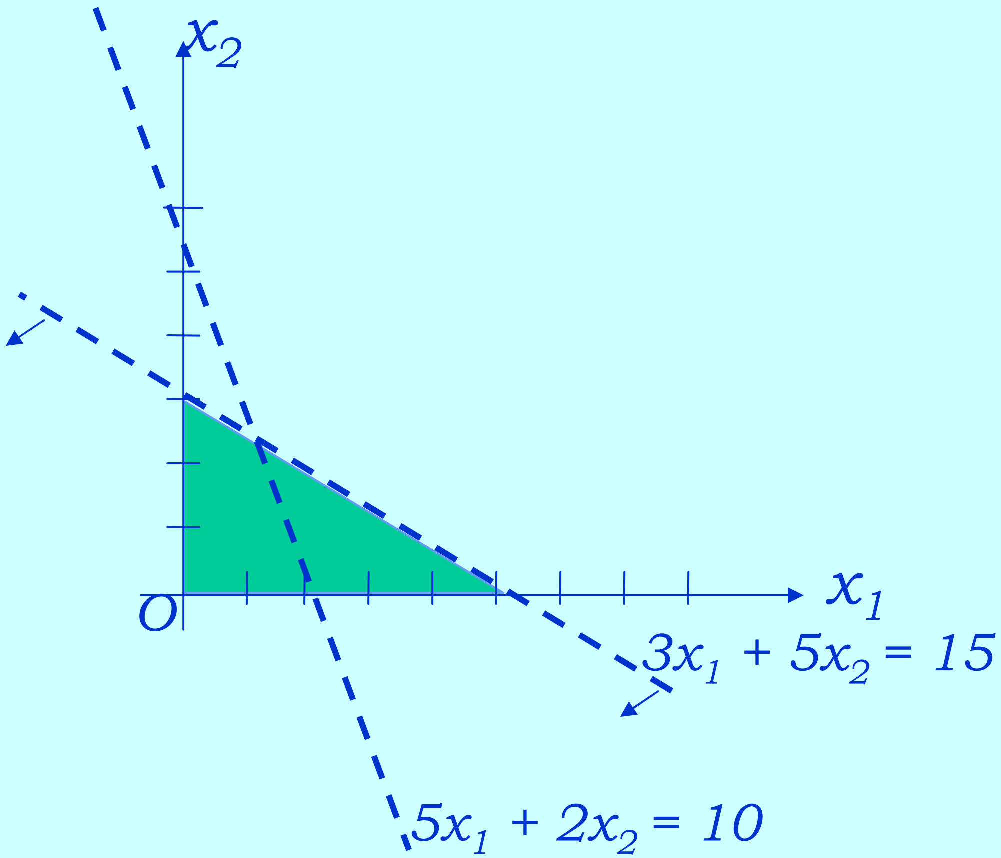
**contraintes de non négativité**

- $x_j$ - variables de décision
- $z$, fonction à optimiser - fonction objectif ( f. o. )
- $c_j$ , $a_{i\,j}$ et $b_i$ - constantes connues (expressions linéaires)

# *Résolution Graphique*

- ***Problème à deux variables de décision*** $x_1$ ***et*** $x_2$ ***:***
  - *f. o. - droite dans* $\Re^2$
  - *contraintes - hemi-plans de* $\Re^2$
  - *P =* $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2})$ *- solution admissible (réalisable) si P satisfait toutes les contraintes*
  - *région admissible - l'ensemble des solutions admissibles*
  - ***solution optimale*** *- solution admissible qui optimise la f.o.*

# Exemple 1




$$\max\ z = 5\,x_1 + 3\,x_2$$

sc

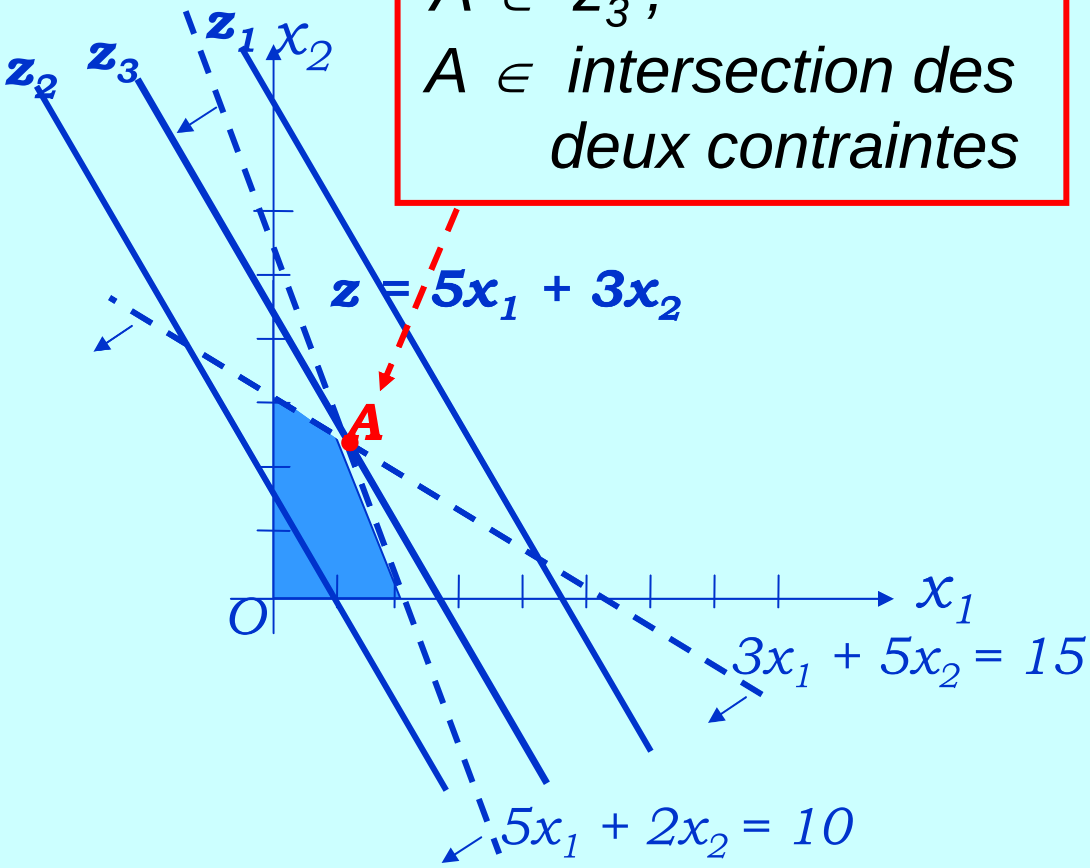
$$3\,x_1 + 5\,x_2 \leq 15$$

$$5\,x_1 + 2\,x_2 \leq 10$$

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

# Exemple 1

$A \in z_3$ ;
$A \in$ intersection des deux contraintes



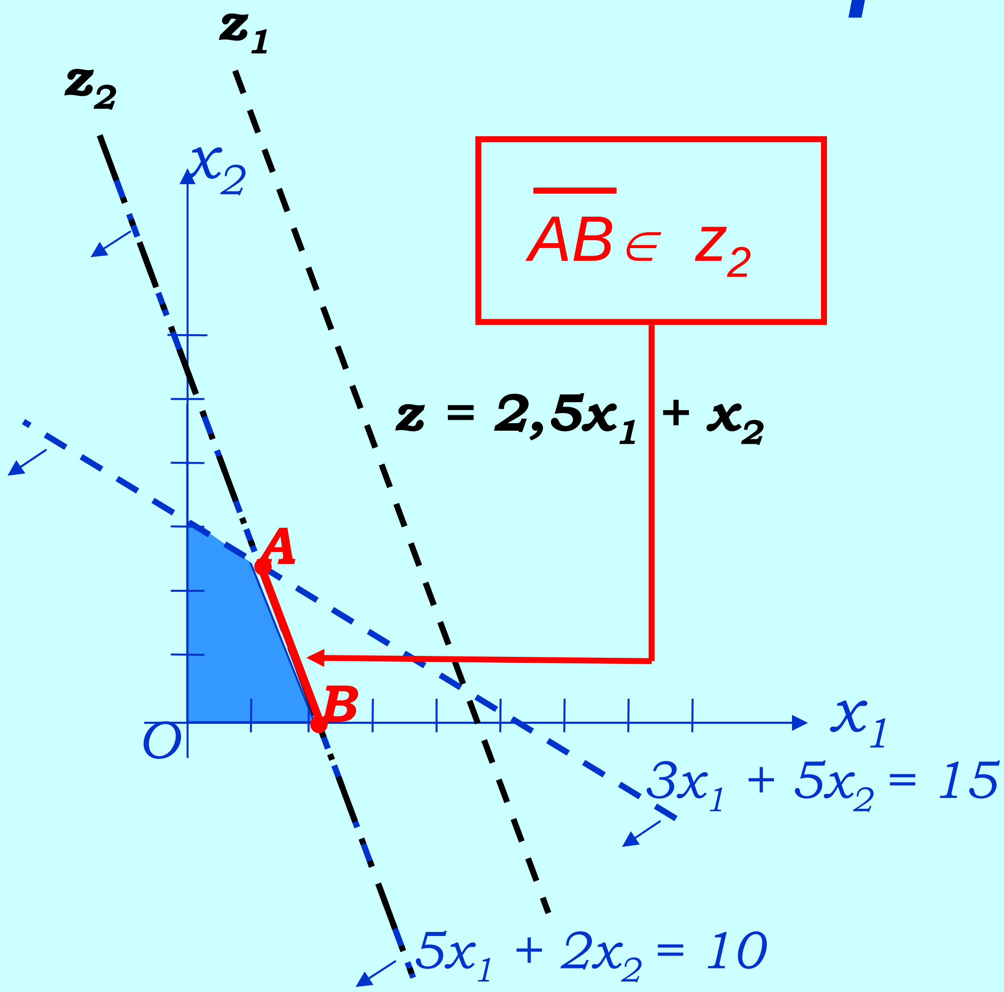

$$\max \; z = 5x_1 + 3x_2$$

sc

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$\forall \; z \Rightarrow$
direction $= -c_1 / c_2$
$= -5/3$

# Exemple 2




$$\max\ z = 2{,}5\,x_1 + x_2$$

**sc**

$$3\,x_1 + 5\,x_2 \leq 15$$
$$5\,x_1 + 2\,x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$\forall\ z \Rightarrow$

$\text{direction} = -\,c_1 / c_2$

$= -2{,}5$

# Résumé

- ***Région admissible <u>borné :</u>***
  - *polygone dont les côtés sont des segments des droites représentant les contraintes linéaires du problème*
  - *un point P $\in$ à l 'intersection de 2 côtés du polygone est un <u>point extrême</u>*
  - *solution optimale:*
    - » ***point extrême $\Rightarrow$ solution optimale unique***
    - » ***côté du polygone $\Rightarrow$ infinité de solutions optimales***

      ***( la valeur de la f. o. est unique )***

# Cas spéciaux

- **Région admissible non borné**

contraintes :

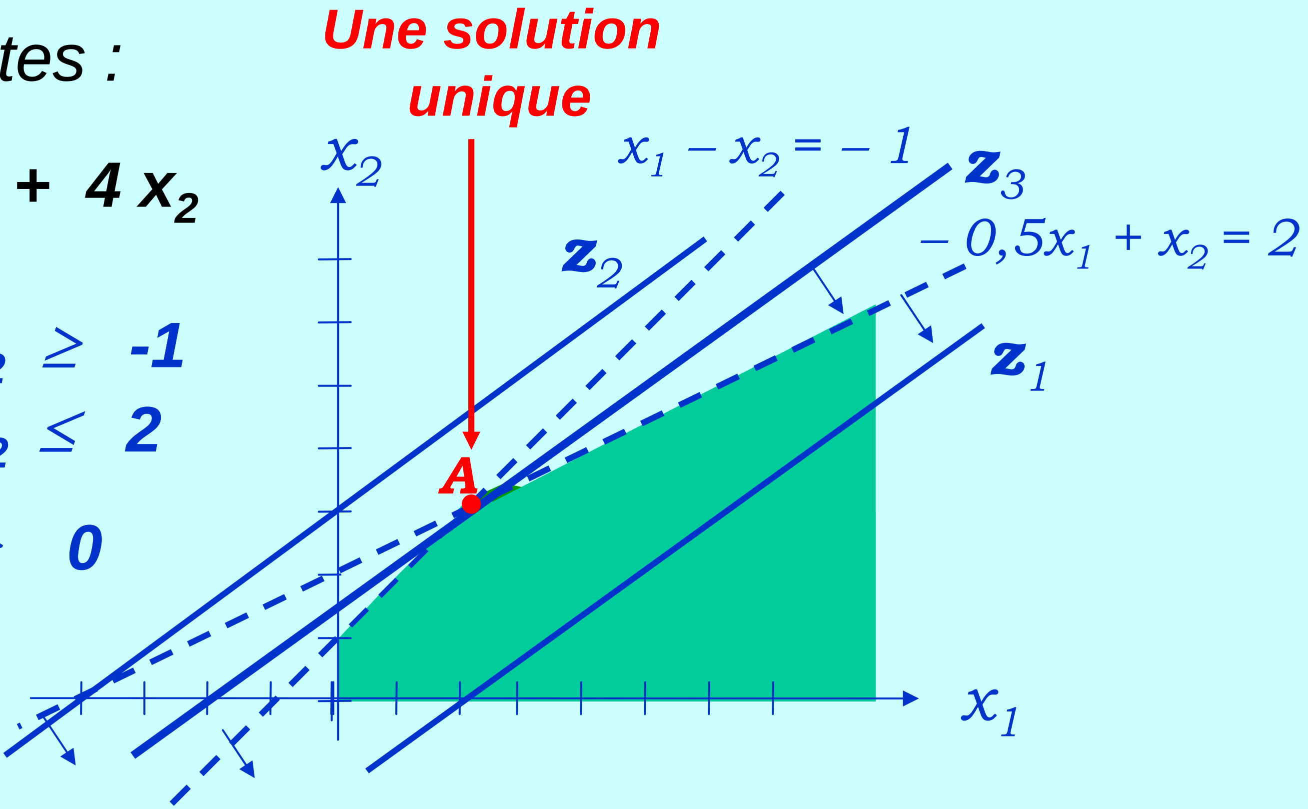
$$\max \; z = -3\,x_1 + 4\,x_2$$

sc

$$x_1 - x_2 \geq -1$$

$$-0{,}5\,x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



# Cas spéciaux

- ***Région admissible non borné***

*contraintes :*

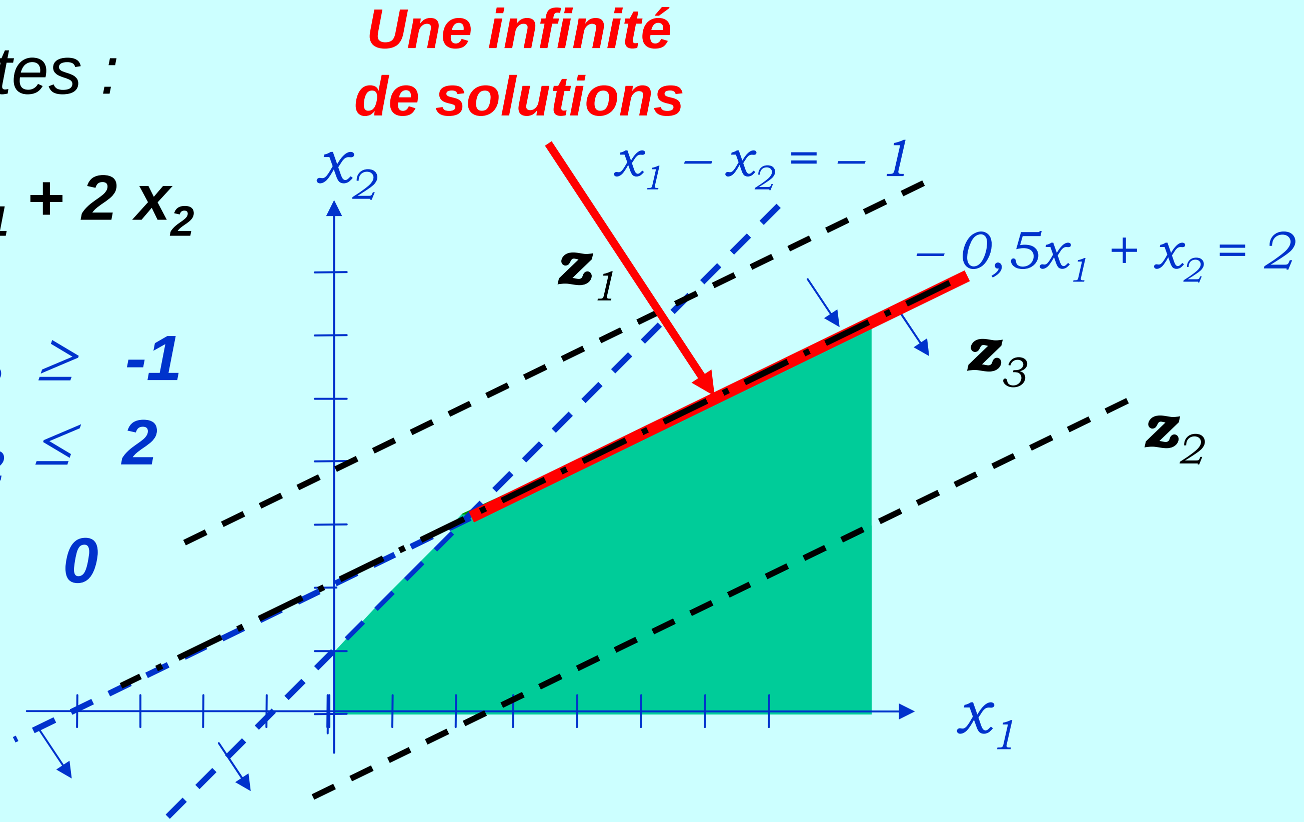
$$\max\ z = -x_1 + 2x_2$$

**sc**

$$x_1 - x_2 \geq -1$$

$$-0{,}5x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



# Cas spéciaux

- ***Région admissible non borné***

contraintes :

**Pas de solution finie**

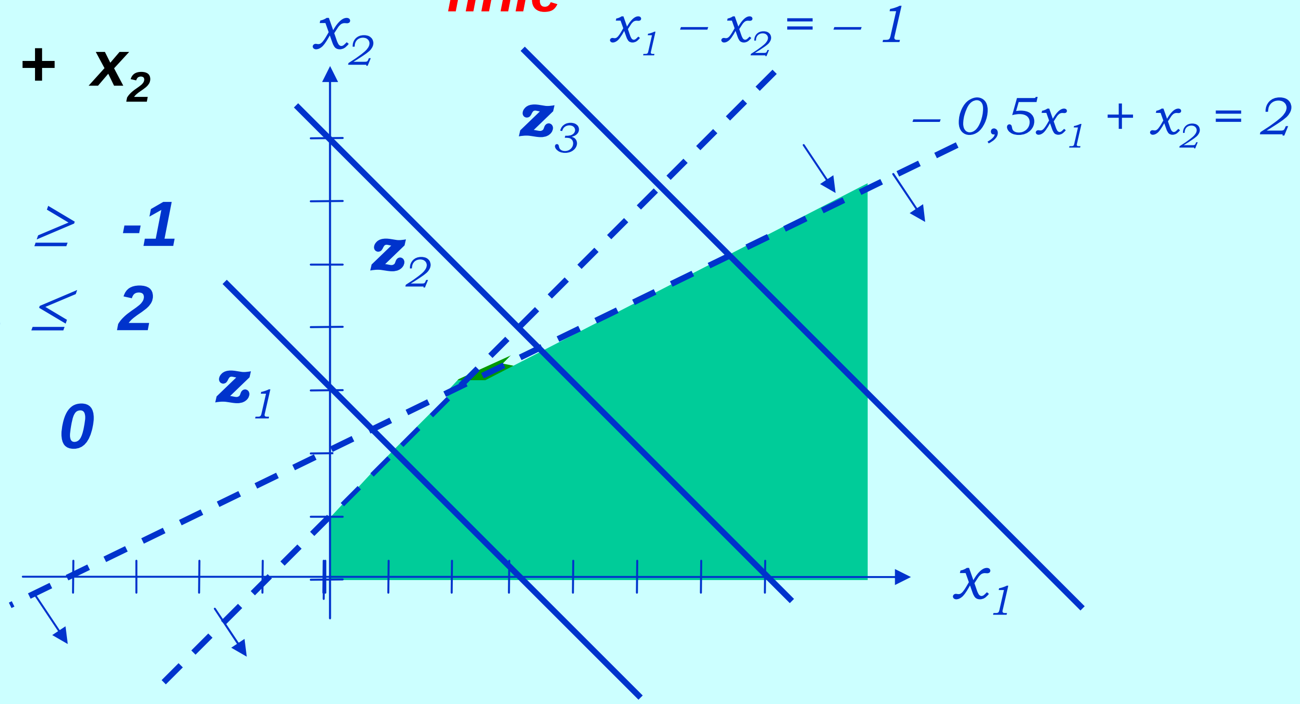
$$\max\ z = x_1 + x_2$$

**sc**

$$x_1 - x_2 \geq -1$$

$$-0{,}5\, x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



# ***Résumé***

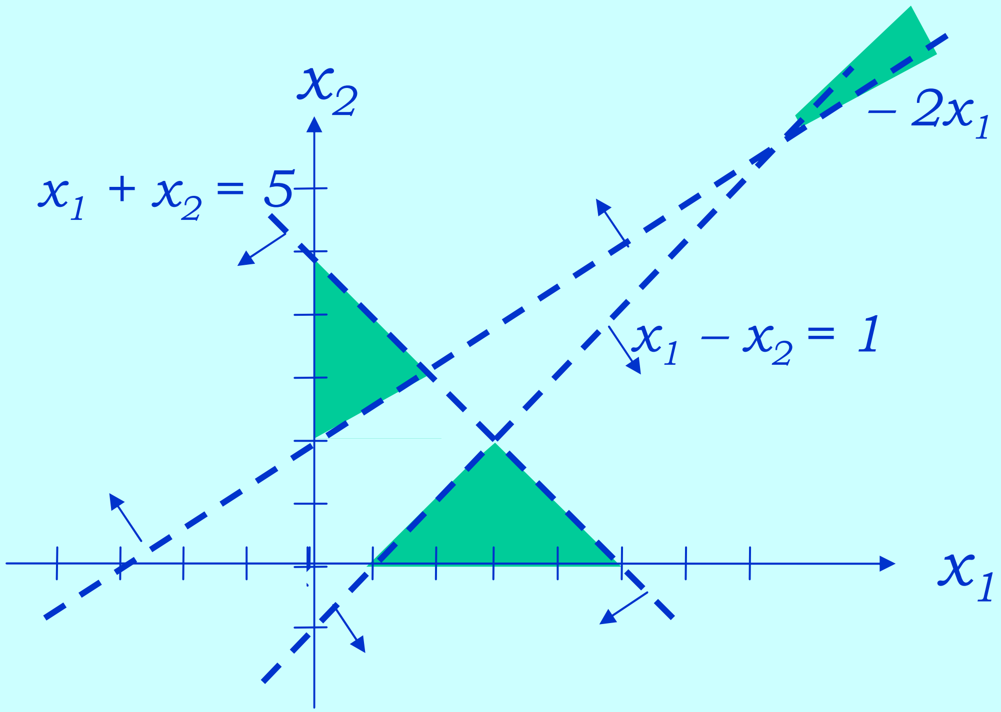
- ***Région admissible <u>non borné :</u>***
  - *solution optimale:*
    - » ***point extrême*** $\Rightarrow$ ***solution optimale unique***
    - » ***côté de la région admissible***

      $\Rightarrow$ ***infinité de solutions optimales***

      ***( la valeur de la f. o. est unique )***
    - » ***pas de solution optimale finie***

# Un dernier cas spécial

**Région admissible vide $\Rightarrow$ contraintes incompatibles**




**1$^{er}$ cas :**

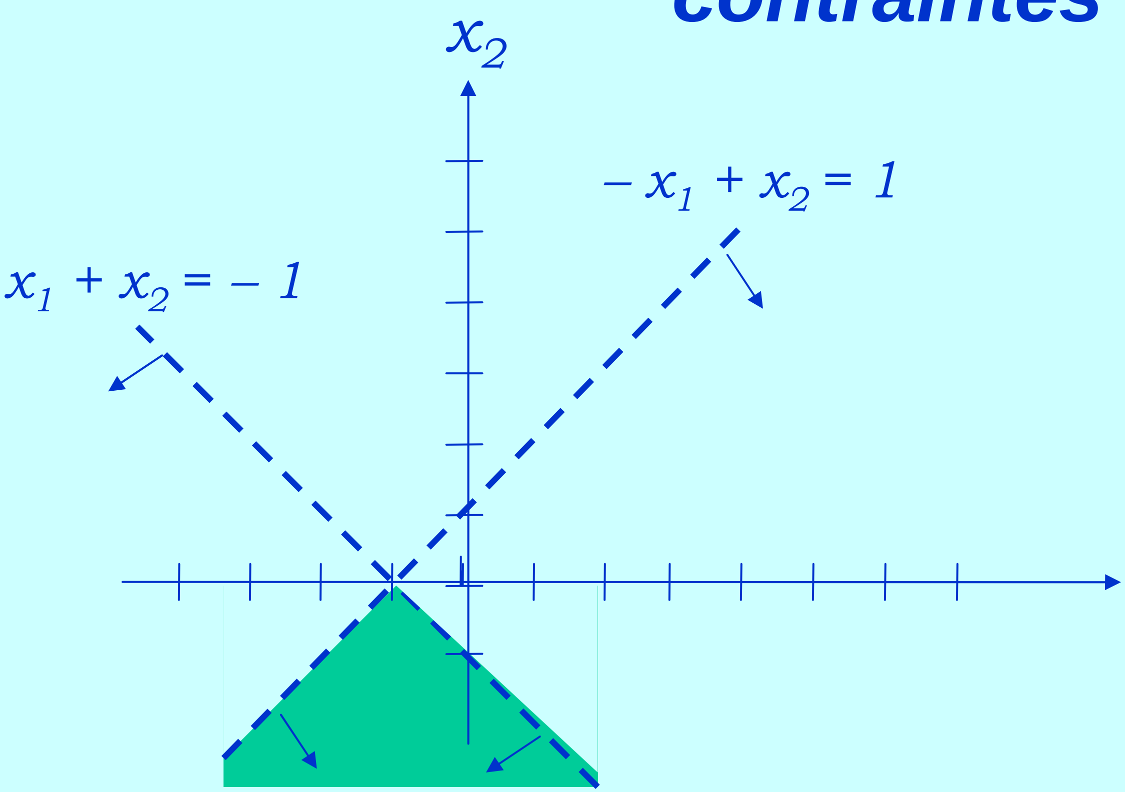
**$\cap$ des hemi plans est vide**

$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$-2x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$x_1 - x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

# Un dernier cas spécial

- **Région admissible vide** $\Rightarrow$ **contraintes incompatibles**




**2ème cas : contrainte de non négativité pas satisfaite**

$$x_1 + x_2 \le -1$$
$$-x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

# Généralisation

- ***Problème à r > 2 variables de décision $\Rightarrow$ solution graphique ?!?!***
- ***Vocabulaire suggéré par la méthode graphique :***

  1 - *région admissible : région convexe d'un espace de dimension r ( polyèdre convexe )*

  2 - *un point P $\in$ à l'intersection de $s \geq 2$ hyperplans représentant les contraintes est un point extrême du polyèdre*

# Généralisation

- ***Problème à r > 2 variables de décision $\Rightarrow$ solution graphique ?!?!***
- ***Vocabulaire suggéré par la méthode graphique :***

  3 - *solution optimale:*

  » ***unique*** $\Rightarrow$ ***point extrême du polyèdre***

  » ***infinité de solutions optimales*** $\Rightarrow$ ***frontière du polyèdre = hyperplan de dimension < r ( la valeur de la f. o. est unique )***

# *Méthode du Simplexe*

- ***Méthode <u>exacte</u> et itérative***
- ***Parcours des points extrêmes jusqu'à trouver la (les) solution(s) optimale(s), si en existe***
- ***Identification des cas de contraintes incompatibles***
- ***Basée sur l'algèbre des matrices***