**Université Abdelmalek Essaadi – Tétouan**

Ecole Nationale de Commerce et de Gestion de Tanger

Elément : Probabilités et statistiques (2ème année S3)

Année universitaire 2023-2024.

*Ghizlan Loumrhari*

**Planche 3. Les variables aléatoires, l’espérance mathématique et la variance**

**Exercice 1.** On lance un dé non pipé et on note $X$ la variable aléatoire représentant le résultat du lancer. Calculer la moyenne et la variance associées à cette expérience.

**Réponse 1.** On note $X$ la variable aléatoire représentant le résultat du lancer d’un dé non pipé. Calculons la moyenne et la variance associée à cette expérience.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x\_{i}$$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $$p\_{i}$$ | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |

$$μ=E\left(X\right)=\sum\_{}^{}x\_{i}p\_{i}=\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+…+\frac{6}{6}\right)=3,5$$

$$σ^{2}=V\left(X\right)=\sum\_{}^{}\left(x\_{i}-E(X)\right)^{2}p\_{i}=\frac{1}{6}((\left(1-3,5\right)^{2}+\left(2-3,5\right)^{2}+…+\left(6-3,5\right)^{2})=\frac{17,5}{6}=2,9$$

**Exercice 2.** Soit $X$ une variable aléatoire normale de moyenne $μ$ et d’écart-type $σ$ et soient $X\_{1},X\_{2},…X\_{n}$, $n$ variables aléatoires indépendantes copies de la variable aléatoire modèle $X$. On définit les variables aléatoires suivantes :

$Y=\sum\_{i=1}^{n}\left(\frac{X\_{i}-\overbar{X}\_{n}}{σ}\right)^{2}$ et $Z=\sum\_{i=1}^{n}\left(\frac{X\_{i}-μ}{σ}\right)^{2}$

où $\overbar{X}\_{n}$ est la moyenne échantillonnale de $X$.

Quelles sont les lois suivies par les variables aléatoires $Y$ et $Z$. Justifier votre réponse en quelques phrases.

**Réponse 2.** La variable aléatoire $Z$ est la somme des carrés de $n$ variables aléatoires normales centrés et réduites indépendantes. Elle suit une loi de Khi-deux avec $n$ degrés de libertés. La variable aléatoire $Y$ est la somme des carrés de $n$ variables aléatoires normales centrés et réduites. Cependant, seulement $(n-1)$ de ces variables sont indépendantes. La variable $Y$ suit donc une loi de Khi-deux avec $(n-1)$ d.d.l.

**Exercice 3.** On suppose que le temps nécessaire pour apprendre les fondements d’une langue chez les adultes est de 12 mois avec un écart-type de 2,5 mois.

Quelle est la proportion d’adultes capables de maitriser les fondements d’une langue en moins de 9 mois ?

**Réponse 3.** Notons $X$ la variable aléatoire représentant le temps nécessaire à un adulte pour apprendre les fondements d’une langue. Il s’agit d’une variable de moyenne 12 et d’écart-type 2,5.

La variable $Z=(X-12)/2,5$ est une variable aléatoire normale centrée réduite. On cherche à calculer

$$P\left(X\leq 9\right)=P\left(\frac{X-12}{2,5}\leq \frac{9-12}{2,5}\right)$$

$$P\left(X\leq 9\right)=P\left(Z\leq -1,2\right)=F\left(-1,2\right)=1-F\left(1,2\right)=1-0,8849=0,1151$$

Ainsi, 11,51% d’adultes parviennent à maitriser les fondements d’une langue en seulement 9 mois.

**Exercice 4.** Les tests de QI sont conçus de façon à ce que la répartition des QI suive la loi normale N(100;225)

On considère qu'un individu est surdoué s'il fait partie des 5% de la population ayant le QI le plus élevé. A partir de quel QI est-on considéré comme surdoué?

**Réponse 4.**

On cherche :

$$P\left(X\geq y\right)=0,05$$

$$P\left(X\leq y\right)=0,95$$

$$P\left(Z\leq \frac{y-100}{15}\right)=0,95$$

$$\frac{y-100}{15}=1,65$$

$$y=124,75$$

**Exercice 5.** Une étude a permis de révéler que le score d'un candidat lors d'un test, peut être modélisé par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'écart-type 20.
Dans chaque cas, Déterminer l'espérance μ.

(i) 80 % des candidats ont un score inférieur à 60 points.

(ii) 30 % des candidats ont un score supérieur à 70 points.

**Réponse 5.**

1. On cherche :

$$P\left(X\leq 60\right)=0,8$$

$P\left(Z\leq \frac{60-μ}{20}\right)=0,8$

 $\frac{60-μ}{20}=0,85$

 $μ=43$

1. On cherche :

$$P\left(X\geq 70\right)=0,3$$

$$1-P\left(X\leq 70\right)=0,3$$

$$P\left(X\leq 70\right)=0,7$$

 $P\left(Z\leq \frac{70-μ}{20}\right)=0,7$

 $\frac{70-μ}{20}=0,53$

$ $ $μ=59,4$

**Exercice 6.** Un petit pont en bois supporte un poids maximal de 3600 kg. Dans une population utilisant ce pont, le poids des individus est une variable aléatoire de moyenne 60 kg et d’écart-type 10 kg. Soit $S\_{n}$ une variable aléatoire représentant le poids total de $n$ individus. On demande de :

1. calculer la probabilité que 58 personnes puissent traverser le pont en même temps sans problèmes ;
2. donner le nombre maximum d’individus tel que la probabilité qu’ils ne puissent pas traverser le pont est au plus 1%.

**Réponse 6.** Notons $X$ la variable aléatoire le poids d’un individu. Il s’agit d’une variable aléatoire quelconque de moyenne 60 et d’écart-type 10.

Définissons la variable aléatoire somme $S\_{n}=\sum\_{}^{}X\_{i}$

1. 58 personnes traverseront le pont sans problème si et seulement si $S\_{n}<3600$.

On cherche alors $P\left(S\_{n}\leq 3600\right)$. Comme $n$ est grand ($58>30)$, le TCL s’applique et

 $\frac{S\_{58}-μn}{σ\sqrt{n}}↝N(0,1)$

Il vient alors que,

$$P\left(S\_{n}<3600\right)=P\left(Z\_{n}<\frac{3600-58×60}{10×\sqrt{58}}\right)=P\left(Z\_{n}<1,5757\right)$$

$$P\left(S\_{n}<3600\right)=0,9418$$

La probabilité que 58 personnes traversent le pont en sécurité est de 94,18%.

1. On cherche le nombre de personnes maximal qui ne puissent pas traverser le pont avec une probabilité de 1%.

On cherche $n$ de telle sorte que

$$\left(S\_{n}\geq 3600\right)=P\left(Z\_{n}\geq \frac{3600-n×60}{10×\sqrt{n}}\right)\leq 0,01$$

$$1-P\left(Z\_{n}\leq \frac{3600-n×60}{10×\sqrt{n}}\right)\leq 0,01$$

$$\frac{3600-n×60}{10×\sqrt{n}}\geq 2,3263$$

On obtient une équation de second degré dont les racines sont $63$ et $57$.

Le nombre doit donc être inférieur à $63.$