Programmation linéaire

Montage préparé par :

André Ross

Professeur de mathématiques

Cégep de Lévis-Lauzon

Introduction

Nous verrons comment trouver la ou les solutions optimales dans des situations comportant des contraintes qui peuvent se traduire par des inéquations du premier degré.

Problème de programmation linéaire

La direction d'une usine de meubles a constaté qu'il y a trop de temps libres dans chacun des départements de l'usine. Pour remédier à cette situation, elle décide de fabriquer deux nouveaux modèles de bureau, M_1 et M_2.

Ateliers	Modèles		Temps libres
	M_1	M_2	
Sciage	1	2	20
Assemblage	2	1	22
Sablage	1	1	12

Les temps de fabrication, pour chacun de ces modèles, dans les ateliers de sciage, d'assemblage et de sablage ainsi que les temps libres dans chacun de ces ateliers sont donnés dans le tableau ci-dessus.

Ces temps représentent le nombre d'heures nécessaires à une personne pour effectuer le travail. Les profits que la compagnie peut réaliser pour chaque unité de ces modèles sont de 300 \$ pour M_1 et de 200 \$ pour M_2. La direction désire déterminer combien de bureaux de chaque modèle elle doit fabriquer pour maximiser son profit.

Variables et contraintes

Symboliquement, on a :
$$\begin{cases} x + 2y \leq 20 \\ 2x + y \leq 22 \\ x + y \leq 12 \\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \end{cases}$$

Ateliers	Modèles		Temps libres
	M_1	M_2	
Sciage	1	2	20
Assemblage	2	1	22
Sablage	1	1	12

Posons x, le nombre de bureaux du modèle M_1, et y, le nombre de bureaux du modèle M_2. La contrainte imposée par les temps libres à l'atelier de sciage est :

$$x + 2y \leq 20$$

Les autres contraintes sont :

$$2x + y \leq 22$$

$$x + y \leq 12$$

À ces contraintes, s'ajoutent des contraintes de non-négativité puisque le nombre de bureaux ne peut être négatif; on a donc également :

$$x \geq 0 \text{ et } y \geq 0$$

Représentation graphique du problème

Symboliquement, on a : $\begin{cases} x + 2y \leq 20 \\ 2x + y \leq 22 \\ x + y \leq 12 \\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \end{cases}$

Ateliers	Modèles		Temps libres
	M_1	M_2	
Sciage	1	2	20
Assemblage	2	1	22
Sablage	1	1	12

On procède de la même façon pour les autres contraintes.

Les points de rencontre de la droite frontière $2x + y = 22$ avec les axes sont :

(0; 22) et (11; 0)

Les points de rencontre de la droite frontière $x + y = 12$ avec les axes sont :

(0; 12) et (12; 0)

On obtient ainsi le *polygone des solutions admissibles*.

Points sommets

Symboliquement, on a : $\begin{cases} x + 2y \leq 20 \\ 2x + y \leq 22 \\ x + y \leq 12 \\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \end{cases}$

Ateliers	Modèles		Temps libres
	M_1	M_2	
Sciage	1	2	20
Assemblage	2	1	22
Sablage	1	1	12

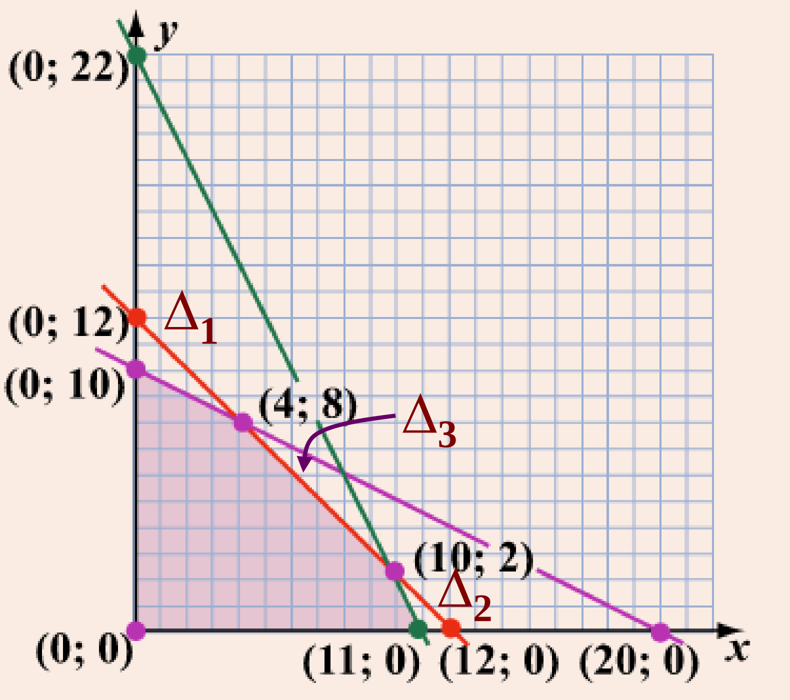
En représentant les droites frontières, on a déjà déterminé quelques points sommets du polygone convexe, soit (0; 0), (11; 0) et (0; 10). Déterminons les autres points de rencontre de droites frontières.

Le système : $\begin{matrix} \Delta_1 \\ \Delta_3 \end{matrix} \begin{cases} x + 2y = 20 \\ x + y = 12 \end{cases}$

a comme solution le couple (4; 8).

Le système : $\begin{matrix} \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{matrix} \begin{cases} 2x + y = 22 \\ x + y = 12 \end{cases}$

a comme solution le couple (10; 2).



On ne considère pas le point de rencontre des droites Δ_1 et Δ_2, car ce n'est pas une solution admissible.

Évaluation de la fonction économique

La direction veut maximiser son profit, c'est-à-dire maximiser la fonction :

$$z = P(x; y) = 300x + 200y$$

Ateliers	Modèles M$_1$	Modèles M$_2$	Temps libres
Sciage	1	2	20
Assemblage	2	1	22
Sablage	1	1	12

En choisissant la solution (2; 5), le profit serait de 1 600$

$$P(2; 5) = (300 \times 2) + (200 \times 5) = 1\,600\ \$$$

Le profit est le même pour (0; 8).

En choisissant la solution (6; 3), le profit serait de 2 400$

$$P(6; 3) = (300 \times 6) + (200 \times 3) = 2\,400\ \$$$

Le profit est le même pour (8; 0).

Il ne saurait être question de calculer le profit réalisable pour chacun des points du polygone convexe, mais on peut faire certaines constatations.

Démarche de solution

On constate que :

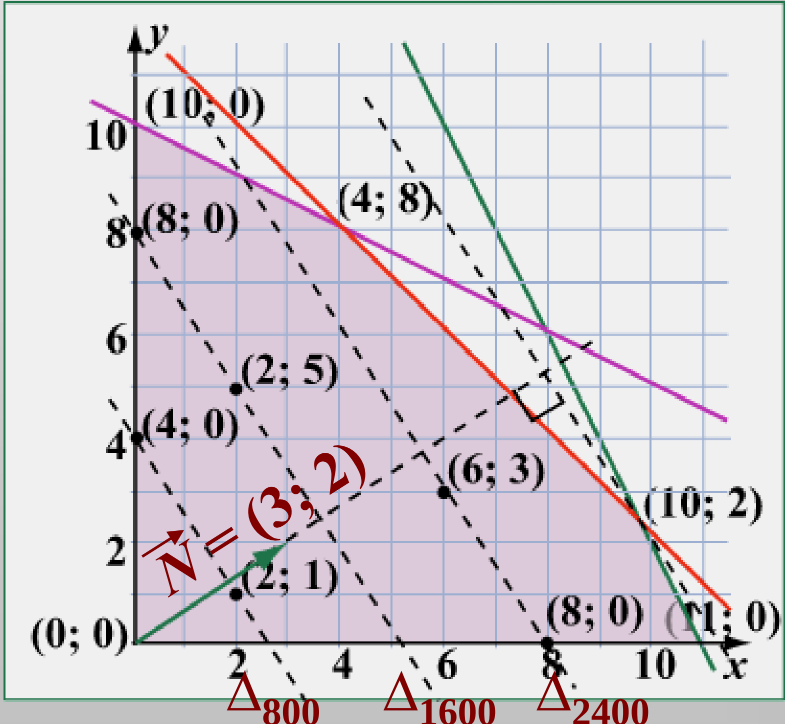
$$P(x; y) = 300x + 200y$$

Ateliers	Modèles		Temps libres
	M_1	M_2	
Sciage	1	2	20
Assemblage	2	1	22
Sablage	1	1	12

On trouve alors :

Sommets	Profit
(0; 0)	0
(0; 10)	2 000
(4; 8)	2 800
(10; 2)	3 400
(11; 0)	3 300

Pour maximiser le profit, il faut donc fabriquer 10 bureaux du modèle M_1 et 2 bureaux du modèle M_2. Le profit sera alors de 3 400$.



Discussion des solutions

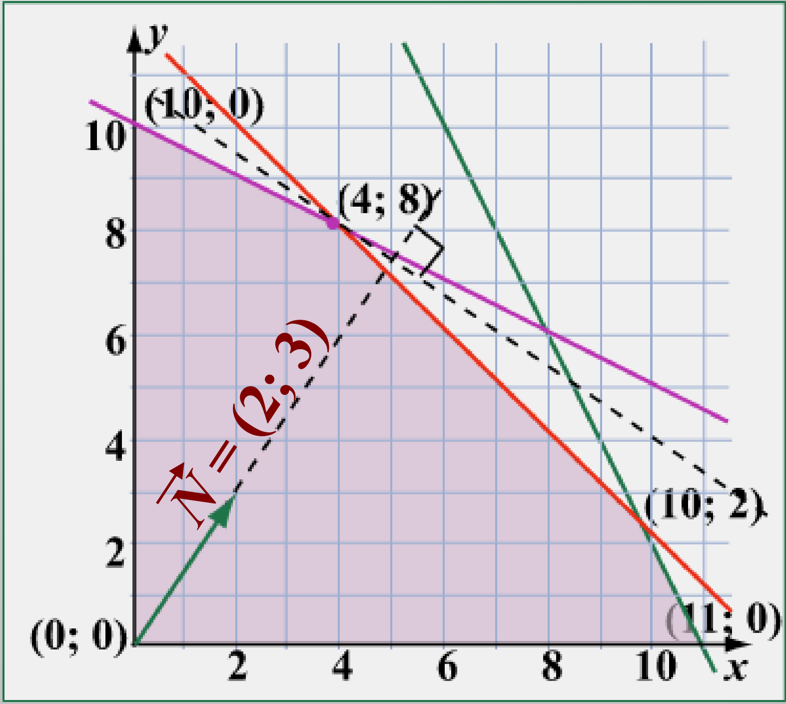
Ateliers	Modèles		Temps libres
	M_1	M_2	
Sciage	1	2	20
Assemblage	2	1	22
Sablage	1	1	12

La solution du problème dépend des contraintes (le polygone des solutions admissibles) mais également de la fonction décrivant le profit.

Si le profit était de 200 \$ pour le modèle M_1 et de 300 \$ pour le modèle M_2, le profit total serait :

$$z = P_2(x; y) = 200x + 300y$$

Dans ce cas, le vecteur normal de l'ensemble des droites parallèles est $\vec{N} = (2; 3)$ et la droite la plus éloignée de l'origine est celle passant par le sommet (4; 8).



Le profit réalisé serait :

$$P_2(4; 8) = 3\ 200\ \$$$

Discussion des solutions

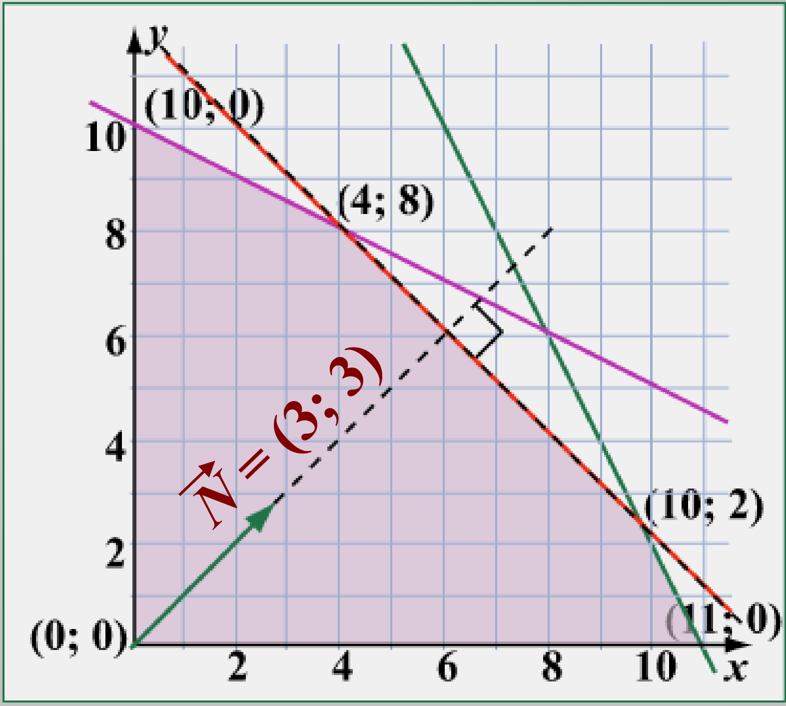
La solution d'un problème de programmation linéaire n'est pas toujours unique.

Ateliers	Modèles		Temps libres
	M_1	M_2	
Sciage	1	2	20
Assemblage	2	1	22
Sablage	1	1	12

Ainsi, si le profit était le même pour chaque modèle, soit 300 $, le profit total serait :

$$z = P_3(x;\, y) = 300x + 300y$$

Dans ce cas, le vecteur normal de l'ensemble des droites parallèles est $\vec{N} = (3;\, 3)$ et la droite la plus éloignée de l'origine passe par les sommets (4; 8) et (10; 2).



Le profit réalisé serait :

$$P_2(4;\, 8) = 3\,600\ \$$$

Vocabulaire

DÉFINITIONS

Demi-plan

L'ensemble-solution d'une inéquation linéaire à deux variables de la forme :

$$ax + by \leq c$$

est appelé *demi-plan fermé*.

Si l'inéquation est définie par une inégalité stricte (< ou >), le demi-plan est dit *ouvert*.

Demi-espace

L'ensemble-solution d'une inéquation linéaire à trois variables de la forme :

$$ax + by + cz \leq d$$

est appelé *demi-espace fermé*.

Si l'inéquation est définie par une inégalité stricte (< ou >), le demi-espace est dit *ouvert*.

Vocabulaire

DÉFINITIONS

Polygone (polyèdre) convexe

L'intersection d'un nombre fini de demi-plans de R^2 est appelée *polygone convexe*. (L'intersection d'un nombre fini de demi-espaces de R^n est appelée *polyèdre convexe*.)

Point sommet

On dit qu'un point *P* est un *point sommet* d'un polygone convexe (ou d'un polyèdre convexe) si:

- ***P* appartient au polygone (polyèdre) convexe;**
- ***P* est l'intersection d'au moins deux frontières du polygone convexe (ou d'au moins trois du polyèdre convexe).**

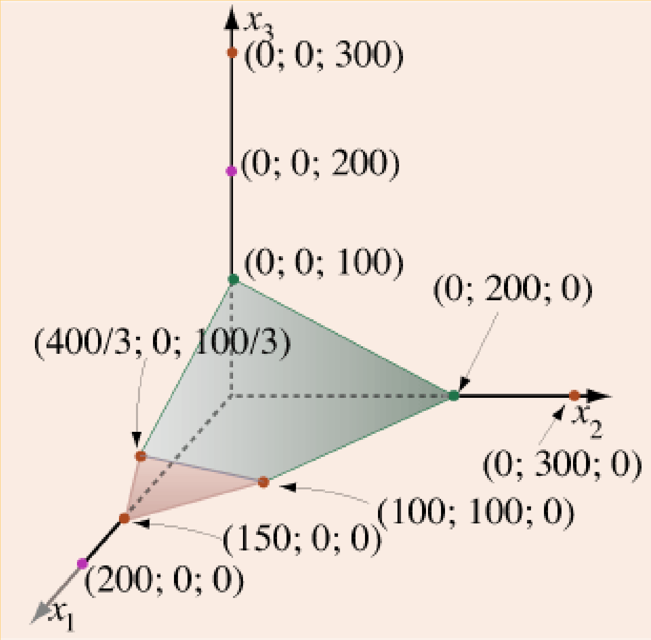
Remarque

Il y a parfois plusieurs solutions admissibles. Lorsque cela se produit, ces solutions sont toutes sur une même arête du polygone ou sur une même face du polyèdre convexe.

Exemple 12.1.1

Représentation graphique

En déterminant les intersections des plans définissant les contraintes, on trouve que les volumes qui pourraient être utilisés sont tous sur le segment de droite joignant les points $P_2(100; 100; 0)$ et $P_2(0; 200; 0)$.



Dans cette situation, aucune raison n'est donnée qui permettrait de choisir une solution plutôt qu'une autre.

Définition du système de contraintes

$$x_1 + x_2 + x_3 = 200$$

$$0{,}20x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}10x_3 \leq 30$$

$$0{,}10x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}20x_3 \leq 20$$

Vocabulaire

THÉORÈME

Fondamental de la programmation linéaire

Soit *P* une fonction linéaire définie sur un polygone (ou polyèdre) convexe.

Si *P* a une ou des valeurs optimales, cette valeur ou ces valeurs optimales sont atteintes en au moins un des sommets du polygone (ou polyèdre) convexe.

Remarque

Ce théorème, que nous avons voulu illustrer par la mise en situation, sera laissé sans démonstration.

De ce théorème découle la procédure suivante.

Programmation linéaire

Procédure

pour résoudre un problème de programmation linéaire

1. Représenter les données dans un tableau de contraintes (structurer les données).
2. Décrire mathématiquement le problème (définir les variables et les équations de contrainte).
3. Représenter graphiquement les contraintes et le polygone (ou polyèdre) convexe.
4. Calculer les coordonnées des points sommets.
5. Évaluer la fonction économique en chacun des points sommets, s'il y a lieu.
6. Analyser et critiquer les résultats selon le contexte.

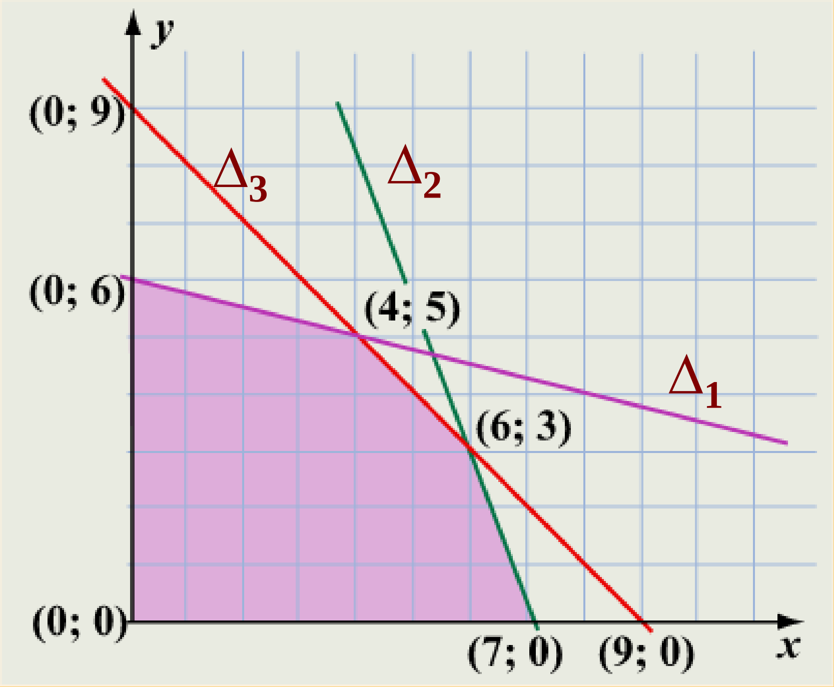
Exemple 12.1.2

	Produits		
	T	*B*	
Contreplaqué	1	4	24
Acrylique	3	1	21
Temps	1	1	9
Profit	24	60	

Interprétation des résultats

Le maximum est donc atteint à (4; 5). Il faudrait produire 4 tables de nuit et 5 bibliothèques par semaine pour maximiser le profit, qui serait alors de 396 $.

(T; B)	z
(0; 0)	0
(0; 6)	360
(4; 5)	396
(6; 3)	324
(7; 0)	168



Exemple 12.1.3

Interprétation des résultats

En optant pour la solution (5; 3), il y aura au total 210 chaises pour 220 postes de travail (tables et bureaux). En optant pour la solution (6; 2), il y aura au total 220 chaises pour 200 postes de travail. La décision finale ne relève pas des mathématiques, c’est une décision administrative.

	Fournisseurs		Quantités requises
	AB	AC	
Chaises	30	20	210
Bureaux	10	30	120
Tables	10	10	80
Coûts ($)	2 000	2 000	

$(x; y)$	w
(0; 10,5)	21 000
(5; 3)	16 000
(6; 2)	16 000
(12; 0)	24 000

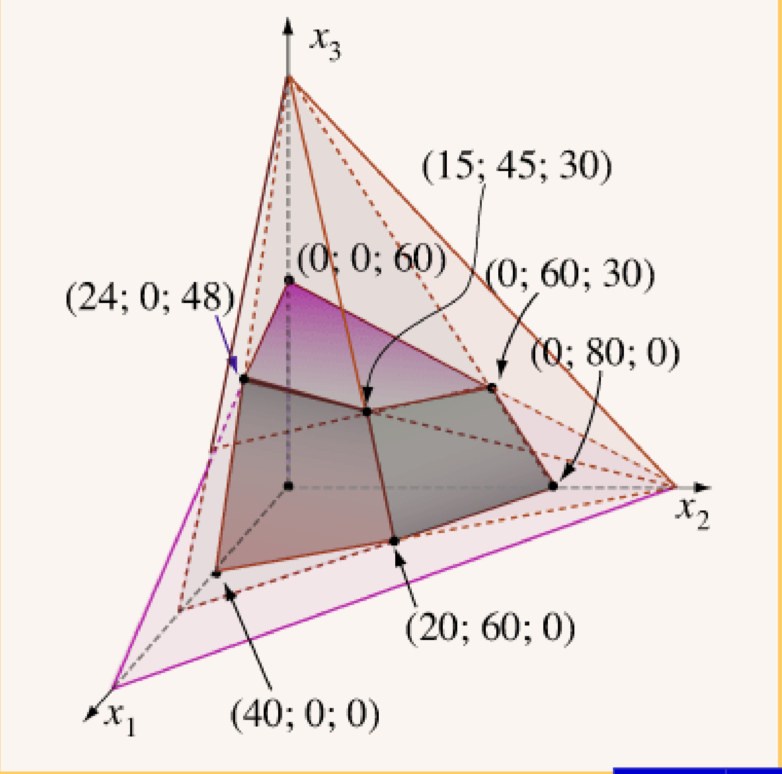
Exemple 12.1.4

	Mélanges			Quantités disponibles
	M_1	M_2	M_3	
Arachides	30	30	20	2 400
Raisins	10	10	20	1 200
Noix	30	10	10	1 200
Profits ($)	2,00	1,50	1,00	

Coordonnées des points sommets

Les points sur les axes sont (0; 0; 60) et (40; 0; 0), 0; 80; 0).
En déterminant les intersections des plans trois par trois, on a :
(0; 60; 30), (15; 45; 30),

(28; 0; 48) et (20; 60; 0).



Fonction économique

En évaluant la fonction économique $z = 2x_1 + 1{,}5x_2 + x_3$ en chacun de ces sommets, on trouve que pour optimiser son profit, le marchand doit préparer 20 sachets du mélange M_1, 60 sachets du mélange M_2 et aucun du mélange M_3. Le profit hebdomadaire sera ainsi de 130 $.

Conclusion

L'objet de la programmation linéaire est de déterminer la solution optimale d'une fonction soumise à différentes contraintes qui se traduisent par des inéquations du premier degré.

L'ensemble-solution de ces inéquations est un polygone convexe (ou un polyèdre convexe) formé des solutions admissibles.

Si le problème admet une solution optimale, celle-ci est atteinte en au moins un sommet du polygone (ou du polyèdre) convexe.

Pour résoudre, il faut déterminer l'ensemble-solution et évaluer la fonction à optimiser en chacun de ses sommets.

Lecture

Mathématiques pour la chimie et la biologie**, section 12.1, p. 371 à 383.**

Exercices

Mathématiques pour la chimie et la biologie**, section 12.2, p. 384 et 385.**